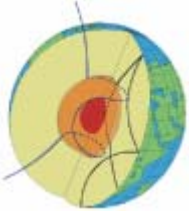


IX. Geofyzikálna konferencia

22. - 23. júna 2011, Bratislava



Tomáš Šoltis(1) a Jozef Brestenský (2)

(1) Geofyzikálny ústav SAV

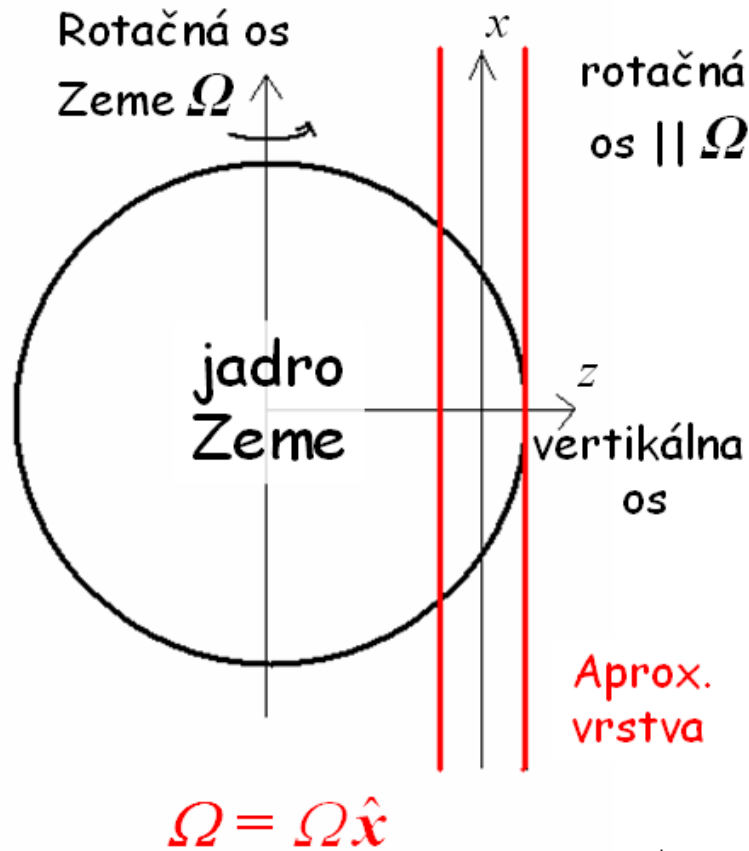
(2) Katedra Astronómie, fyziky Zeme a Meteorológie, FMFI UK



Magnetokonvekcia v kvapalnej vrstve s anizotropnými difuzivitami rotujúca okolo horizontálnej osi

Magnetoconvection in the fluid layer with anisotropic diffusivities
rotating around horizontal axis

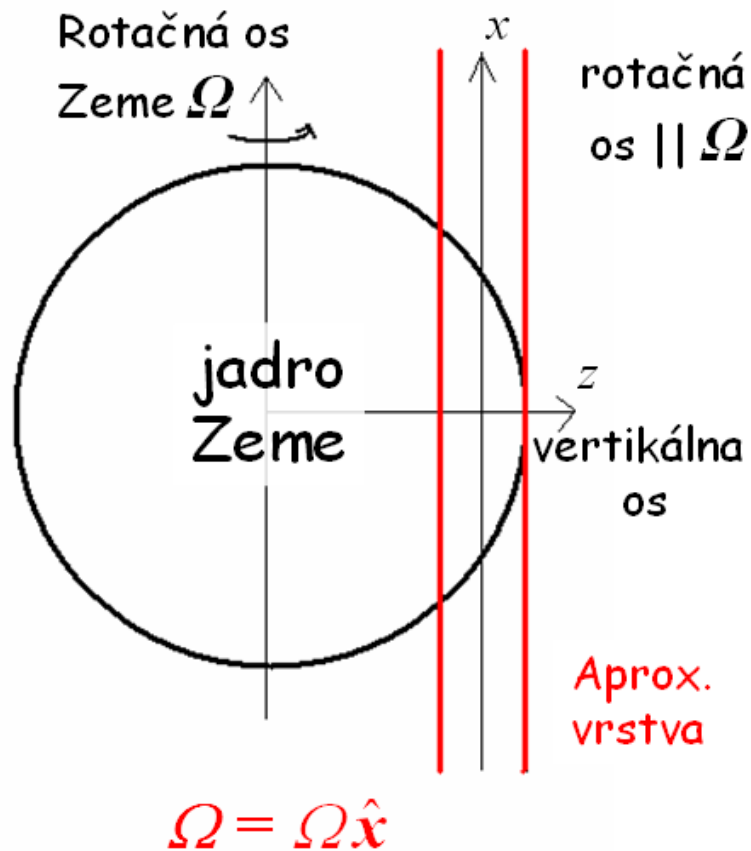
Rovníkové oblasti



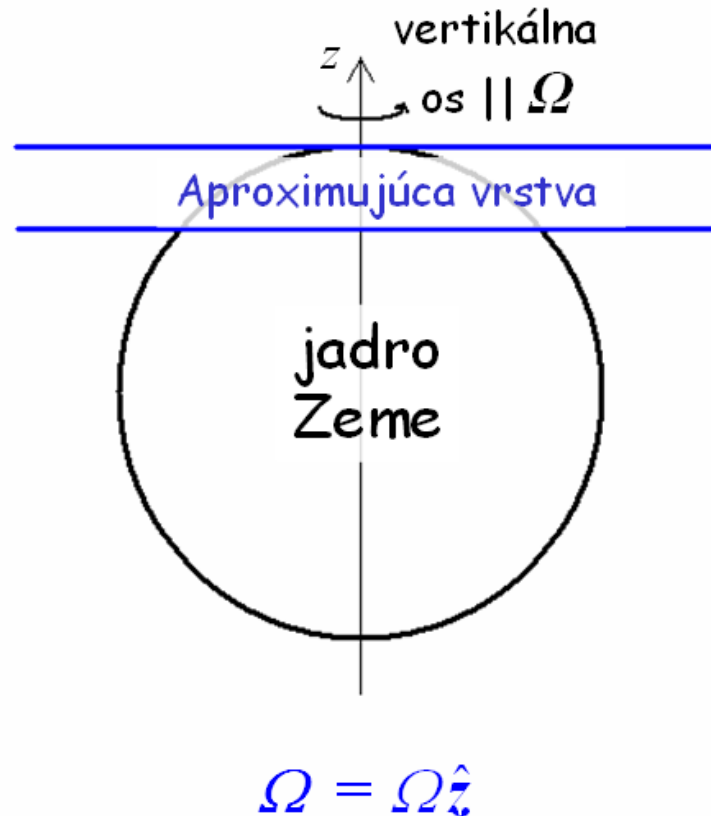
$$\mathbf{B} \perp \Omega \perp \mathbf{g}$$

Základný stav: $U_0 = \mathbf{0}, \quad B_0 = B_0 \hat{y}, \quad T_0 = T_l - \Delta T \frac{z + d/2}{d}.$

Rovníkové oblasti



Polárne oblasti



Základný stav: $U_0 = \mathbf{0}, \quad B_0 = B_0 \hat{y}, \quad T_0 = T_l - \Delta T \frac{z + d/2}{d}.$

Zavedenie anizotropie

Anizotropiu sme zaviedli v najjednoduchšej možnej forme, v ktorej je tepelná vodivosť a viskozita v tvare diagonálneho tenzora s dvoma rôznymi hodnotami jeho troch komponent

$$\nu \rightarrow \boldsymbol{\nu} = \begin{pmatrix} \nu_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \nu_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \nu_{zz} \end{pmatrix}$$

V dvoch smeroch je difúzia rovnaká, ale rôzna od difúzie v tret'om smere,

$$\nu_{zz} > \nu_{xx} = \nu_{yy}, \quad \text{Sa - anizotropia}$$

$$\nu_{zz} < \nu_{xx} = \nu_{yy}, \quad \text{So - anizotropia = BM - anizotropia,}$$

lebo aj rotačná os $\Omega \uparrow \uparrow \hat{x}$ aj magnetické pole $\mathbf{B} \uparrow \uparrow \hat{y}$ sú orientované v horizontálnych smeroch.

Ako mieru anizotropie zavedieme parameter anizotropie α ,

$$\alpha - \text{podiel difuzívít v dvoch rôznych smeroch, } \alpha = \frac{\nu_{xx}}{\nu_{zz}}$$

Základné rovnice

$$R_0 \partial_t \mathbf{u} + \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u} = -\nabla p + \Lambda (\nabla \times \mathbf{b}) \times \hat{\mathbf{y}} + R \mathcal{G} \hat{\mathbf{z}} + E_z \nabla_\alpha^2 \mathbf{u},$$

$$R_0 \partial_t \mathbf{u} + \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{u} = -\nabla p + \Lambda (\nabla \times \mathbf{b}) \times \hat{\mathbf{y}} + R \mathcal{G} \hat{\mathbf{z}} + E_z \nabla_\alpha^2 \mathbf{u},$$

$$\partial_t \mathbf{b} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \hat{\mathbf{y}}) + \nabla^2 \mathbf{b},$$

$$(1/q_z) \partial_t \mathcal{G} = \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{u} + \nabla_\alpha^2 \mathcal{G},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{b} = 0.$$

$$E_z \nabla_\alpha^2 \mathbf{u} = E_z \left[(1 - \alpha_v) \partial_{zz} + \alpha_v \nabla^2 \right] \mathbf{u} \quad \nabla_\alpha^2 \mathcal{G} = \left[(1 - \alpha_g) \partial_{zz} + \alpha_g \nabla^2 \right] \mathcal{G} \quad (\text{BM} = \text{SA})$$

$$E_z \nabla_\alpha^2 \mathbf{u} = \begin{aligned} & E_z \left[(\alpha_v - 1) \partial_{xx} + \nabla^2 \right] \mathbf{u} && \nabla_\alpha^2 \mathcal{G} = \left[(\alpha_g - 1) \partial_{xx} + \nabla^2 \right] \mathcal{G} && (\text{BM typ}) \\ & E_z \left[(1 - \alpha_v) \partial_{zz} + \alpha_v \nabla^2 \right] \mathbf{u} && \left[(1 - \alpha_g) \partial_{zz} + \alpha_g \nabla^2 \right] \mathcal{G} && (\text{SA typ}) \end{aligned}$$

Bezrozmerné parametre

Rovnice sú zbezrozmernené použitím nasledujúcich škál pre dĺžku, čas, rýchlosť, tlak, magnetické pole a teplotu

$$\tilde{z} = dz, \quad \tilde{t} = \frac{d^2}{\eta} t, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \frac{\eta}{d} \mathbf{u}, \quad \tilde{p} = 2\Omega_0 \eta \rho_0 p, \quad \tilde{\mathbf{b}} = B_0 \mathbf{b}, \quad \tilde{\mathcal{G}} = \frac{\eta \Delta T}{\kappa_{zz}} \mathcal{G}$$

modifikované Rayleighove č. $R = \frac{g \alpha_T \Delta T d}{2\Omega_0 \kappa_{zz}}$, Ekmanove č. $E_z = \frac{V_{zz}}{2\Omega_0 d^2}$, $E_x = \frac{V_{xx}}{2\Omega_0 d^2}$

Elsasserove číslo $\Lambda = \frac{B_M^2}{2\Omega_0 \mu \rho_0 \eta}$, Robertsove číslo $q_z = \frac{\kappa_{zz}}{\eta}$, $q_x = \frac{\kappa_{xx}}{\eta}$,

modifikované Rossbyho č. $R_0 = \frac{\eta}{2\Omega_0 d^2}$, anizotropné parametre $\alpha_g = \frac{\kappa_{xx}}{\kappa_{zz}}$, $\alpha_v = \frac{V_{xx}}{V_{zz}}$.

$R = \frac{\text{efektívna vztlaková sila}}{\text{Coriolisova sila}}$, $E_z, E_x = \frac{\text{viskózna sila}}{\text{Coriolisova sila}}$, $R_0 \approx \frac{\text{perióda rotácie}}{\text{magnetický difúzny čas}}$

$\Lambda = \frac{\text{magnetická sila}}{\text{Coriolisova sila}}$, $q_z, q_x = \frac{\text{vertikálna, horizontálna teplotná difuzivita}}{\text{magnetická difuzivita}}$.

Metóda riešenia

Využívali sme lineárnu stabilitnú analýzu.

Poruchy rýchlosti u a magnetického poľa b sme rozložili na poloidálnu a toroidálnu časť

$$\mathbf{u} = a^{-2} [\nabla \times (\nabla \times w \hat{\mathbf{z}}) + \underline{\nabla \times \omega \hat{\mathbf{z}}}] \quad \text{a} \quad \mathbf{b} = a^{-2} [\nabla \times (\nabla \times b \hat{\mathbf{z}}) + \underline{\nabla \times j \hat{\mathbf{z}}}] .$$

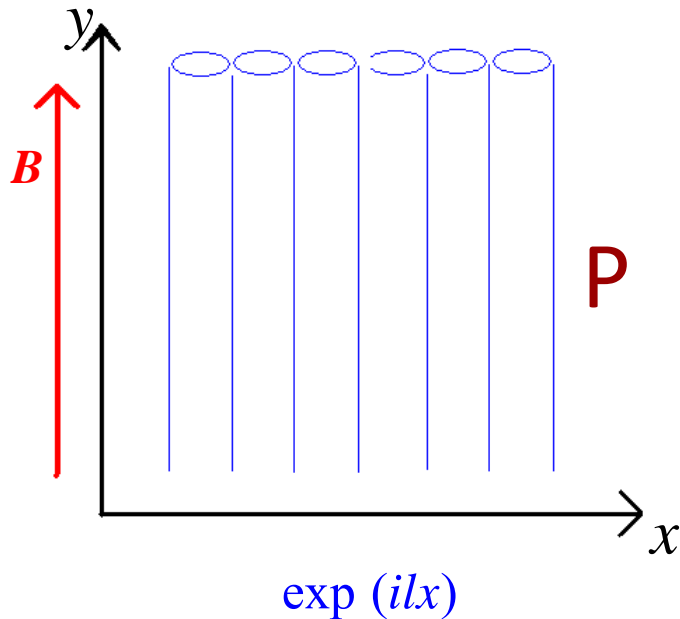
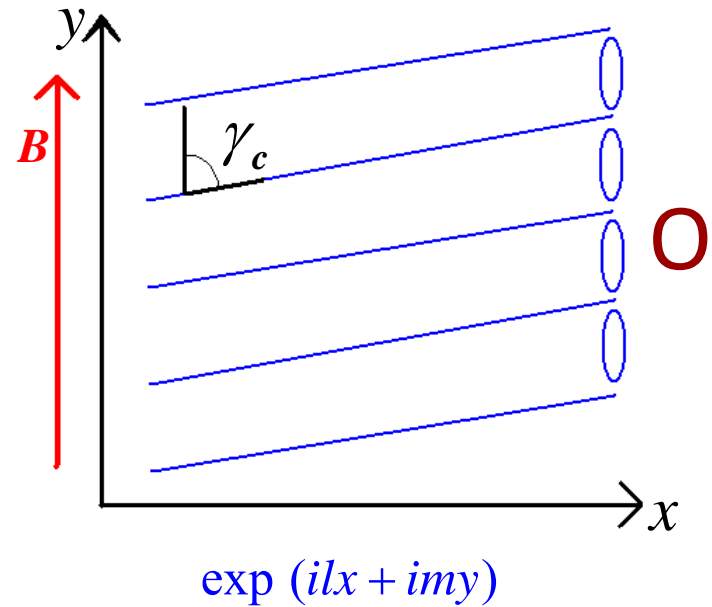
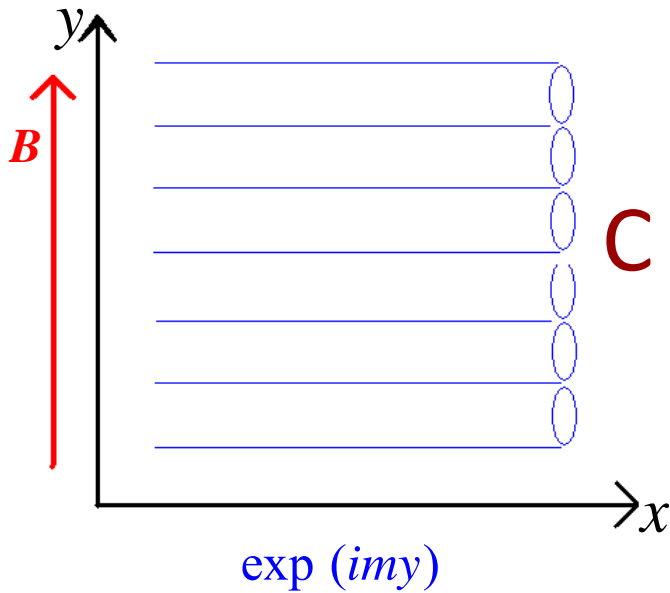
Všetky poruchy (w , ω , b , j a \mathcal{G}) majú tvar

$$f(z, x, y, t) = \Re e [F(z) \exp(ilx + imy) \exp(\lambda t)]$$

(kde horizontálne zložky vlnového čísla l a m určujú $a^2 = l^2 + m^2$).

Hranice sú mechanicky voľné
a dokonale tepelne a elektricky vodivé.

Orientácia konvektívnych roliek



γ_c – uhol medzi osou rolky a mag. poľom B .
Ak tvar poruchy v horizontálnom smere je daný

$$\exp(ilx + imy),$$

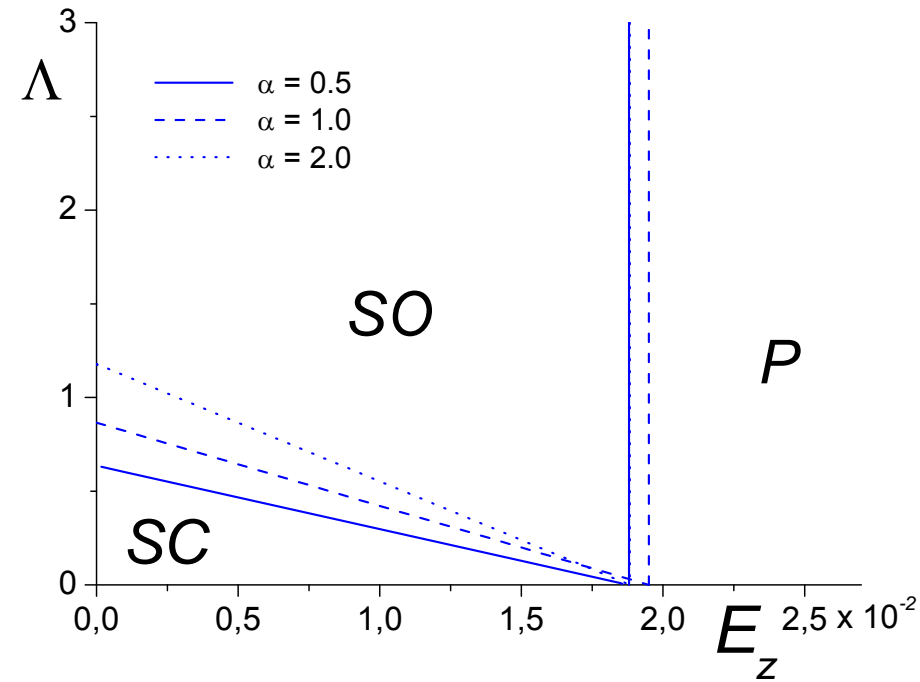
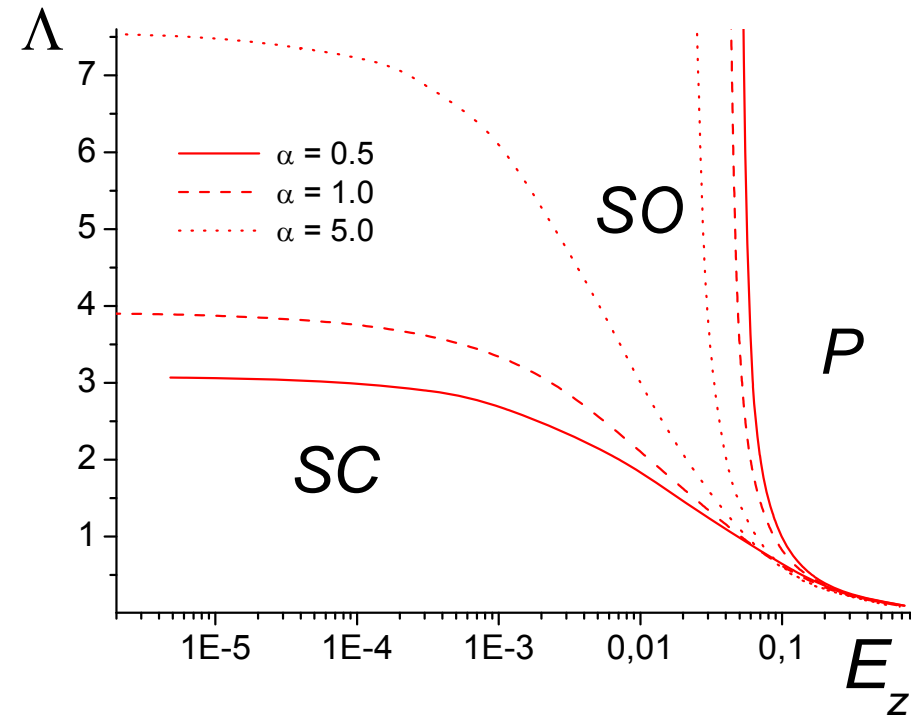
$$\text{potom uhol } \gamma_c = \text{arctg}\left(\frac{m}{l}\right).$$

Pre rolky \perp na B je $l = 0 \rightarrow \gamma_c = \pi/2$,

pre rolky \parallel s B je $m = 0 \rightarrow \gamma_c = 0$.

Horizontálna rotačná os, $\Omega = \Omega \hat{x}$

Vertikálna rotačná os, $\Omega = \Omega \hat{z}$

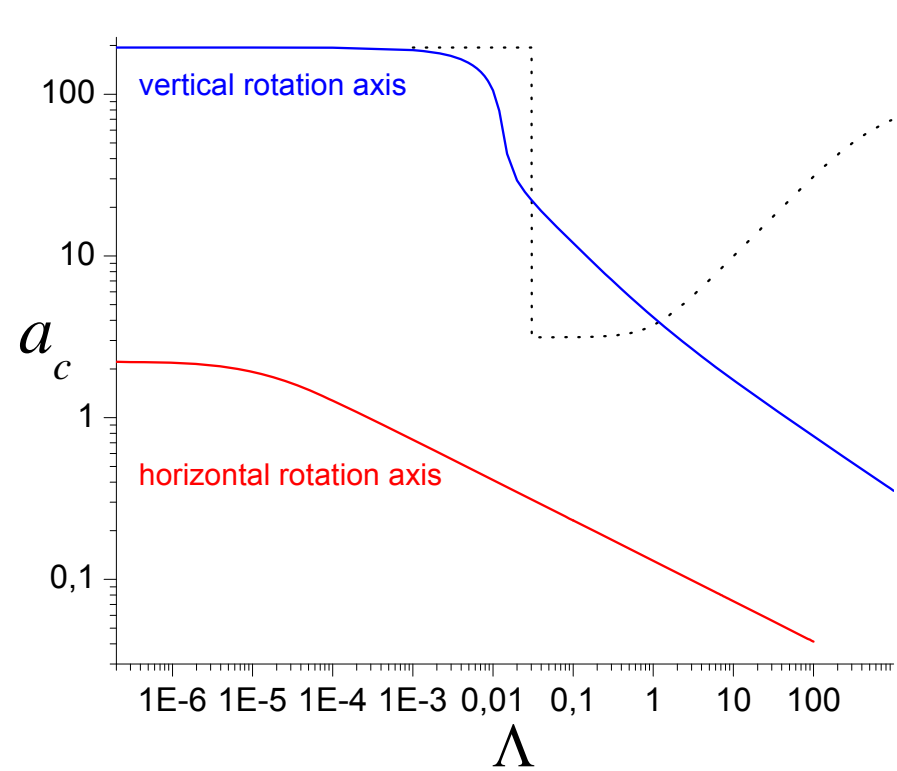
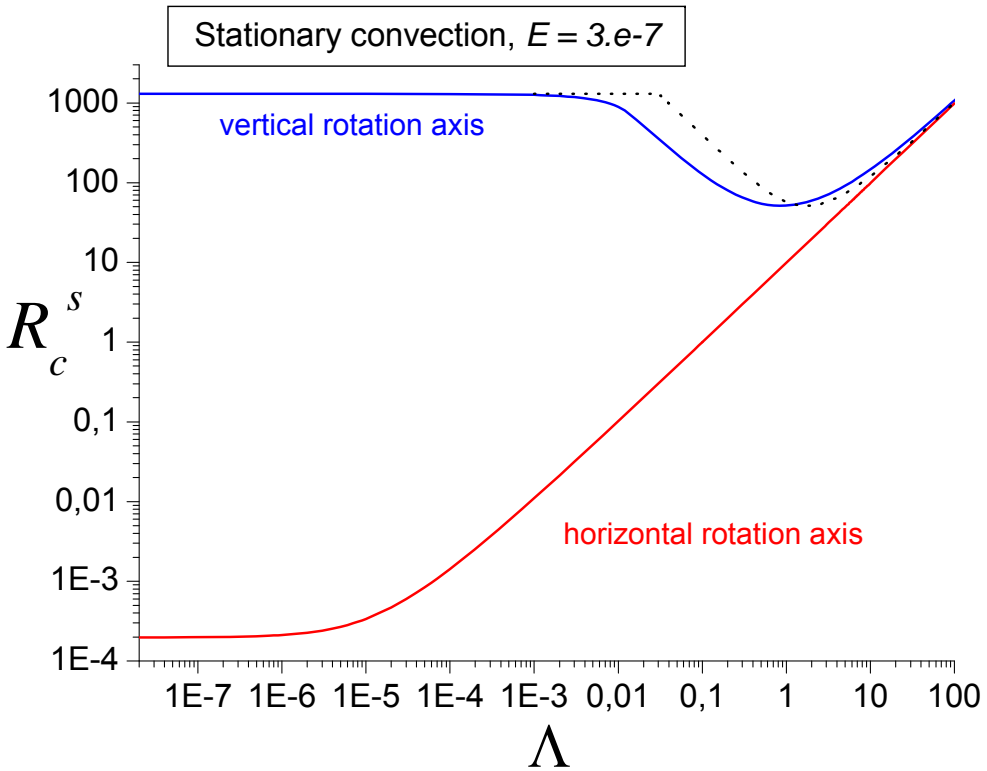


ΛE_z režimový diagram určuje preferovaný mód konvekcie
v priestore parametrov Λ a E_z .

V prípade s horizontálnou rotačnou osou majú hranice preferencie zložitejší tvar
ako v prípade s vertikálnou osou rotácie.

So anizotropia ($\alpha > 1$) redukuje oblasť preferencie SO módov.

Sa anizotropia ($\alpha < 1$) túto oblasť rozširuje.



$$\tilde{\varepsilon} = \Lambda / (\pi^2 E) \ll 1 \Rightarrow \Lambda \ll E$$

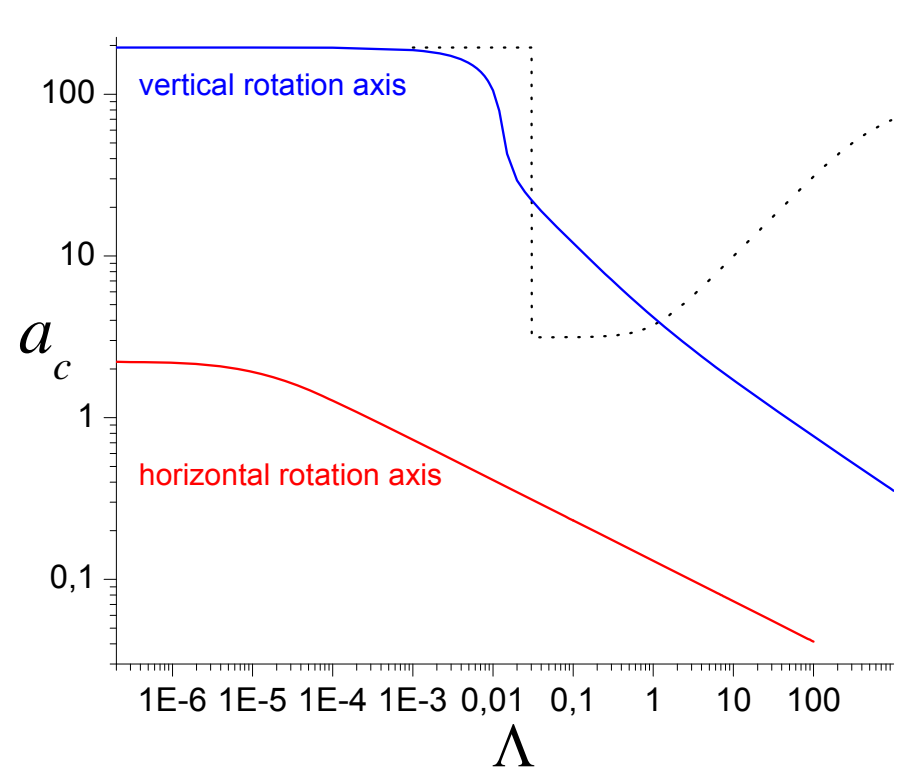
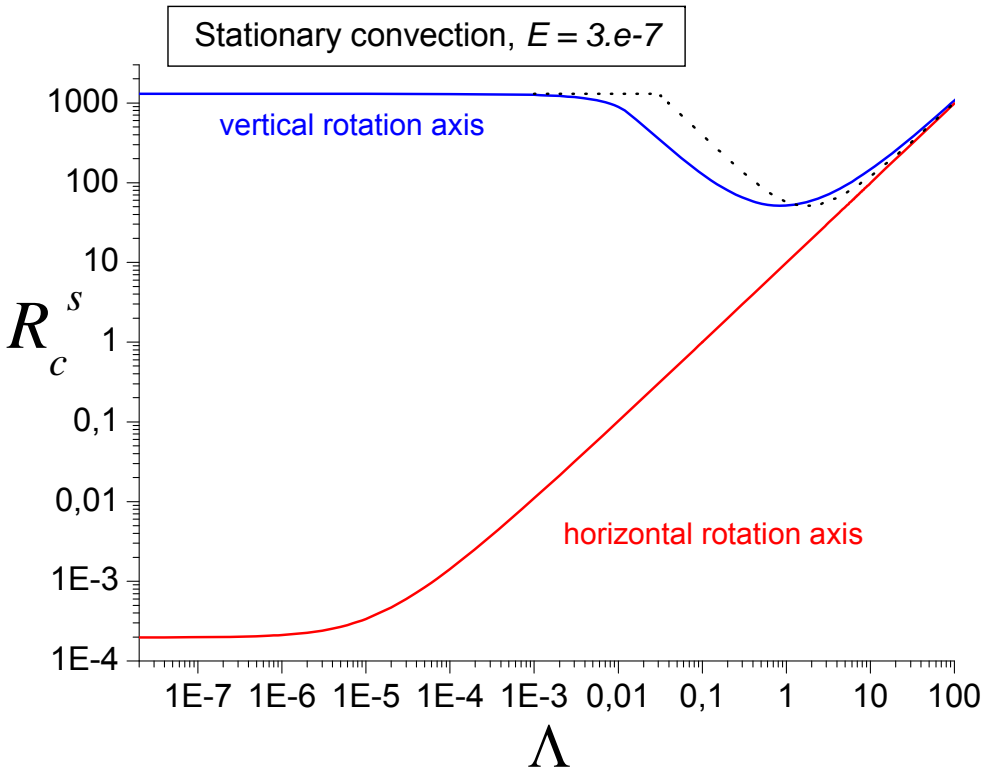
$$R_c^S = \pi^4 E \left(\frac{27}{4} + \frac{3}{2} \tilde{\varepsilon} + O(\tilde{\varepsilon}^2) \right)$$

$$\tilde{a}_c = \frac{1}{2} - \frac{1}{18} \tilde{\varepsilon} + O(\tilde{\varepsilon}^2)$$

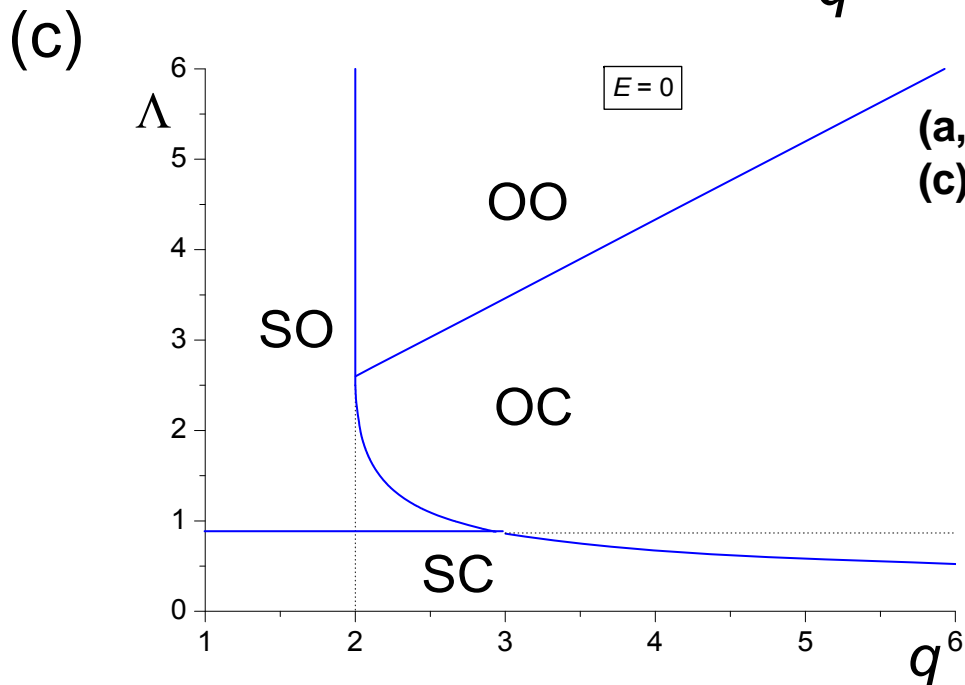
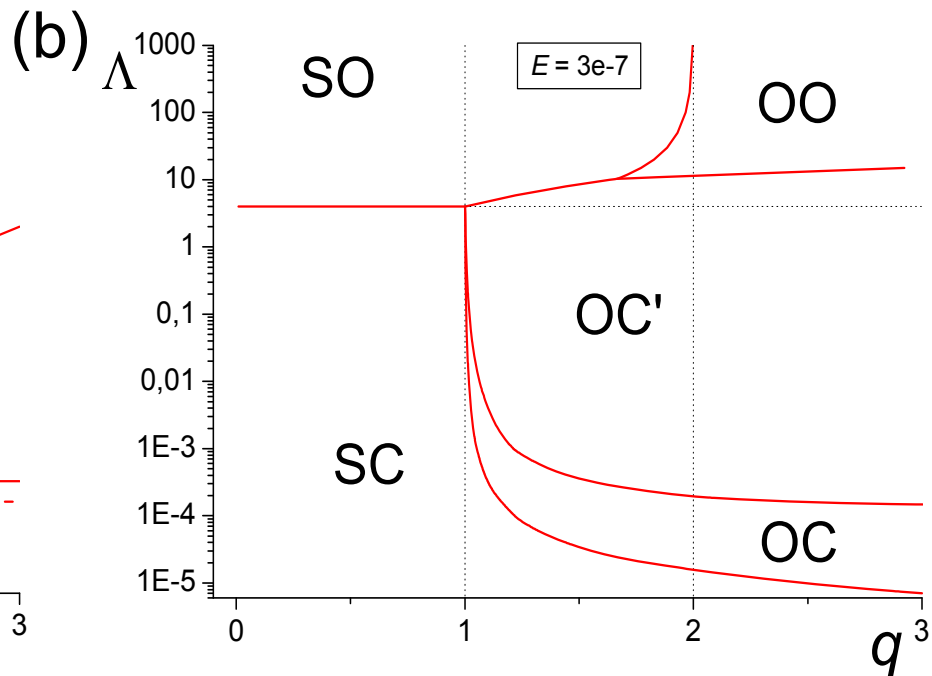
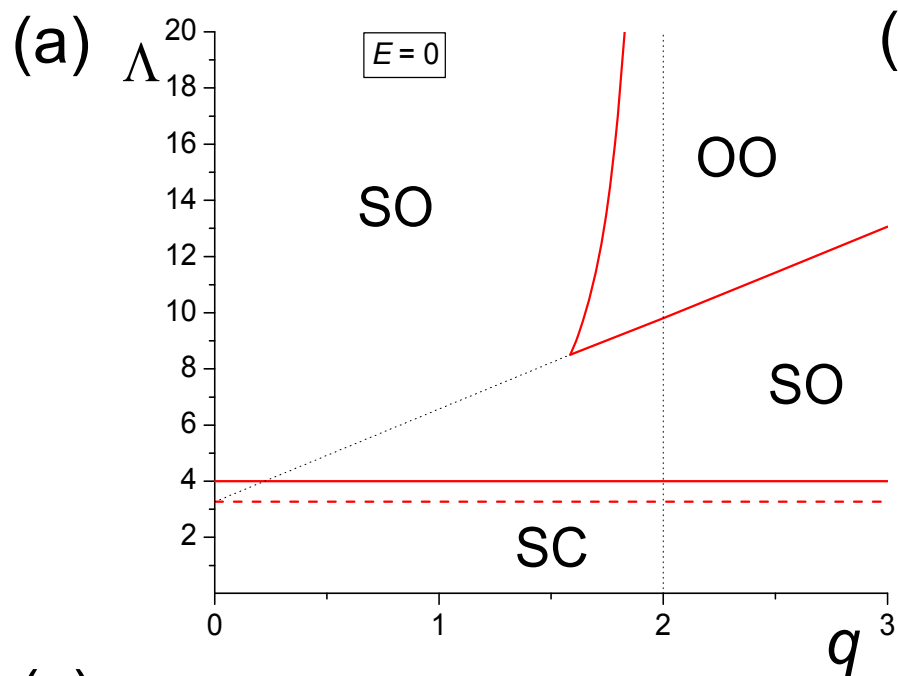
$$\varepsilon = \pi^2 E / \Lambda \ll 1 \Rightarrow \Lambda \gg E$$

$$R_c^S = \pi^2 \Lambda (1 + 2\varepsilon^{1/2} + O(\varepsilon))$$

$$\tilde{a}_c = \varepsilon^{1/2} + O(\varepsilon^{3/2})$$



Rotácia okolo horizontálnej rotačnej osi na rozdiel od vertikálnej **nepotláča** konvekciu pri slabých magnetických poliach $\Lambda \ll O(1)$.
 Pritom pri $\Lambda = O(1)$ **potláča brániaci efekt magnetického poľa** pre konvekciu oveľa efektívnejšie.



(a, b) horizontal rotation axis; $E = 0$, $E = 3.e-7$
 (c) vertical rotation axis; $E = 0$

Domains of preference

- SC** - steady cross rolls
- SO** - steady oblique rolls
- OC** - overstable cross rolls
- OO** - overstable oblique rolls
- OC'** - OO rolls but almost cross ones

nový mód OC'

takmer kolmý na magnetické pole
existuje len v prípade rotácie okolo horizontálnej osi
existuje len vo viskóznom prípade
pri klesajúcom Λ sa blíži k OC módu
jeho existenciu a vlastnosti sa podarilo potvrdiť aj analyticky
anizotropiou je len slabo ovplyvnený

Vhodným asymptotickým priblížením malého vlnového čísla $l \ll a$,

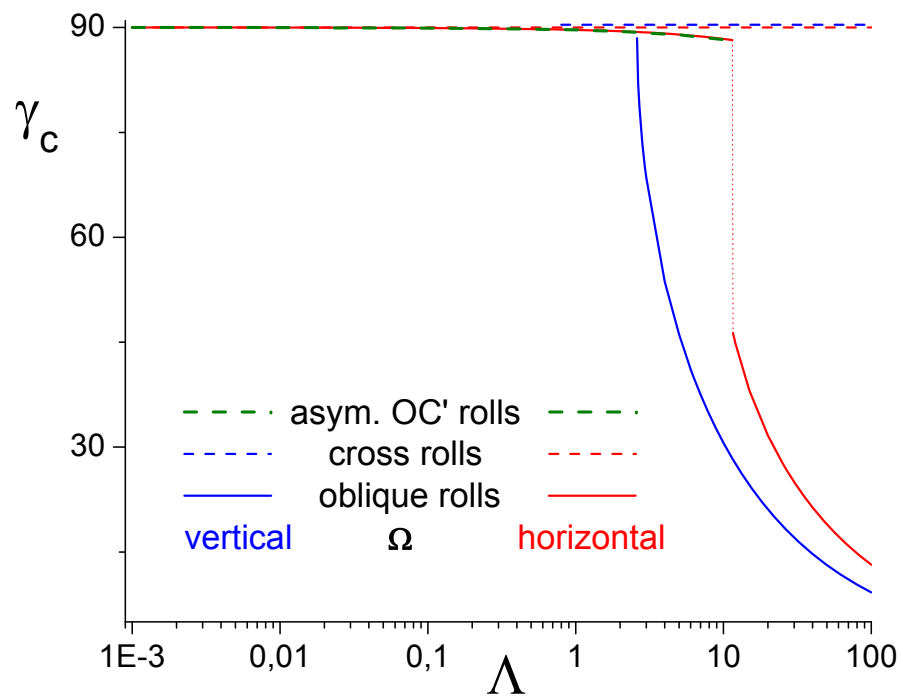
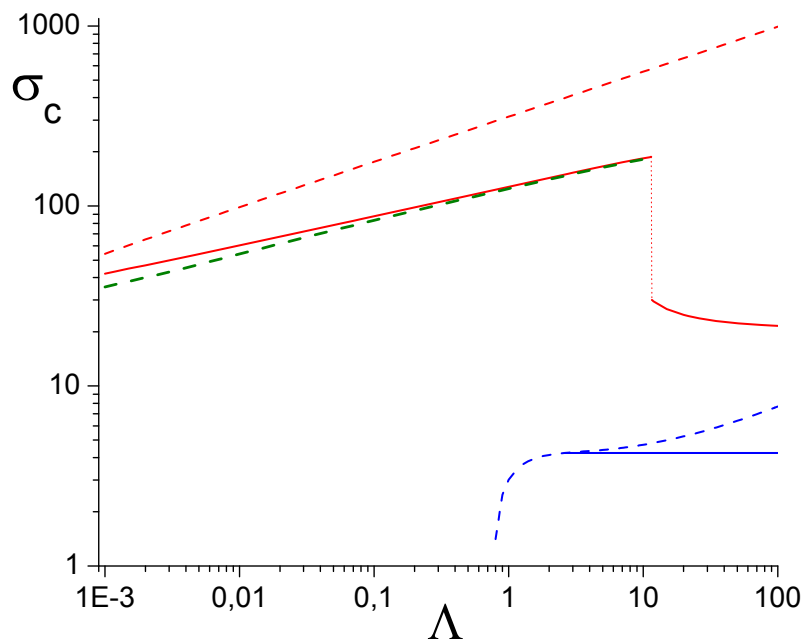
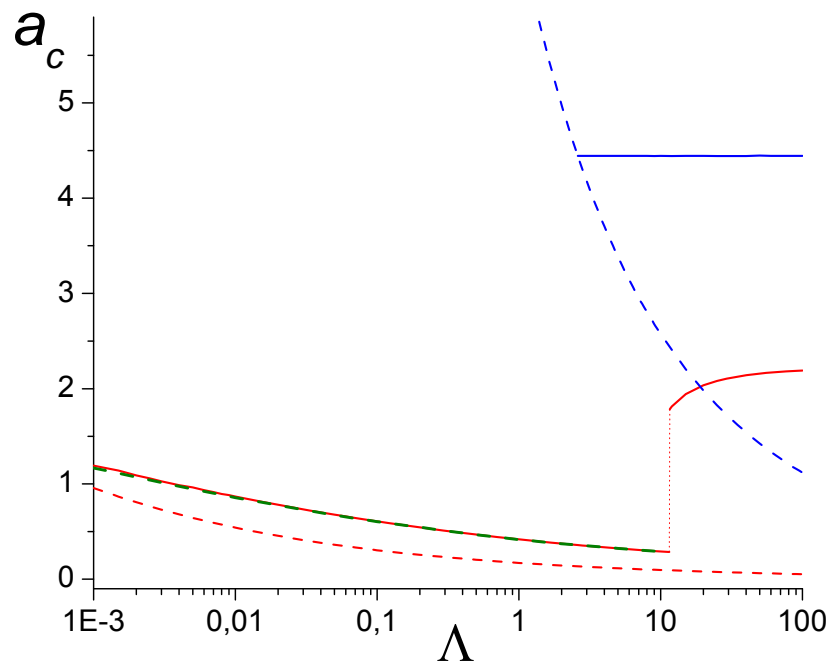
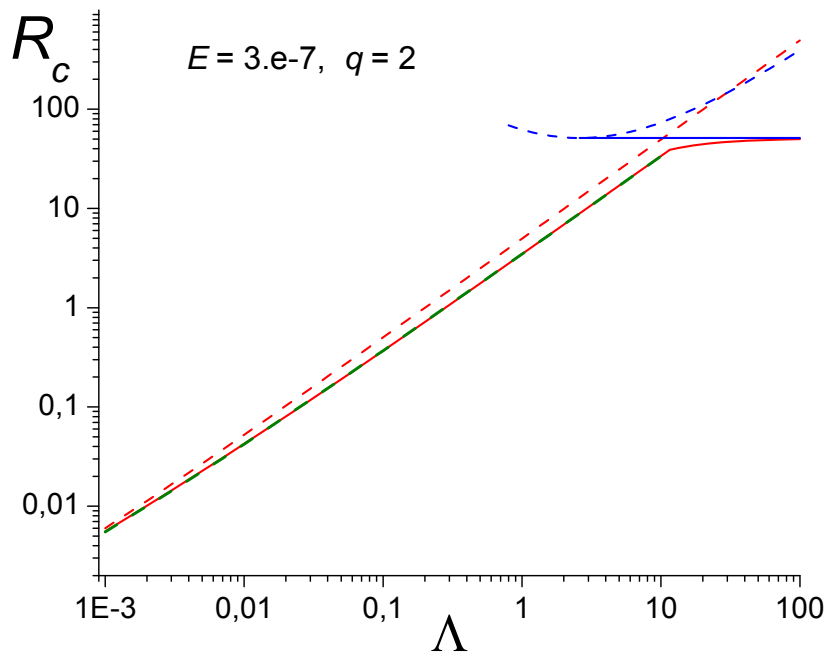
$$(\tilde{l} = \pi\sqrt{l} = \beta c^{1/2} + O(c), \text{ kde } \beta = O(\Lambda E^{1/2}) \text{ a } c = \pi^2 E(1 + \tilde{a})^{3/2}),$$

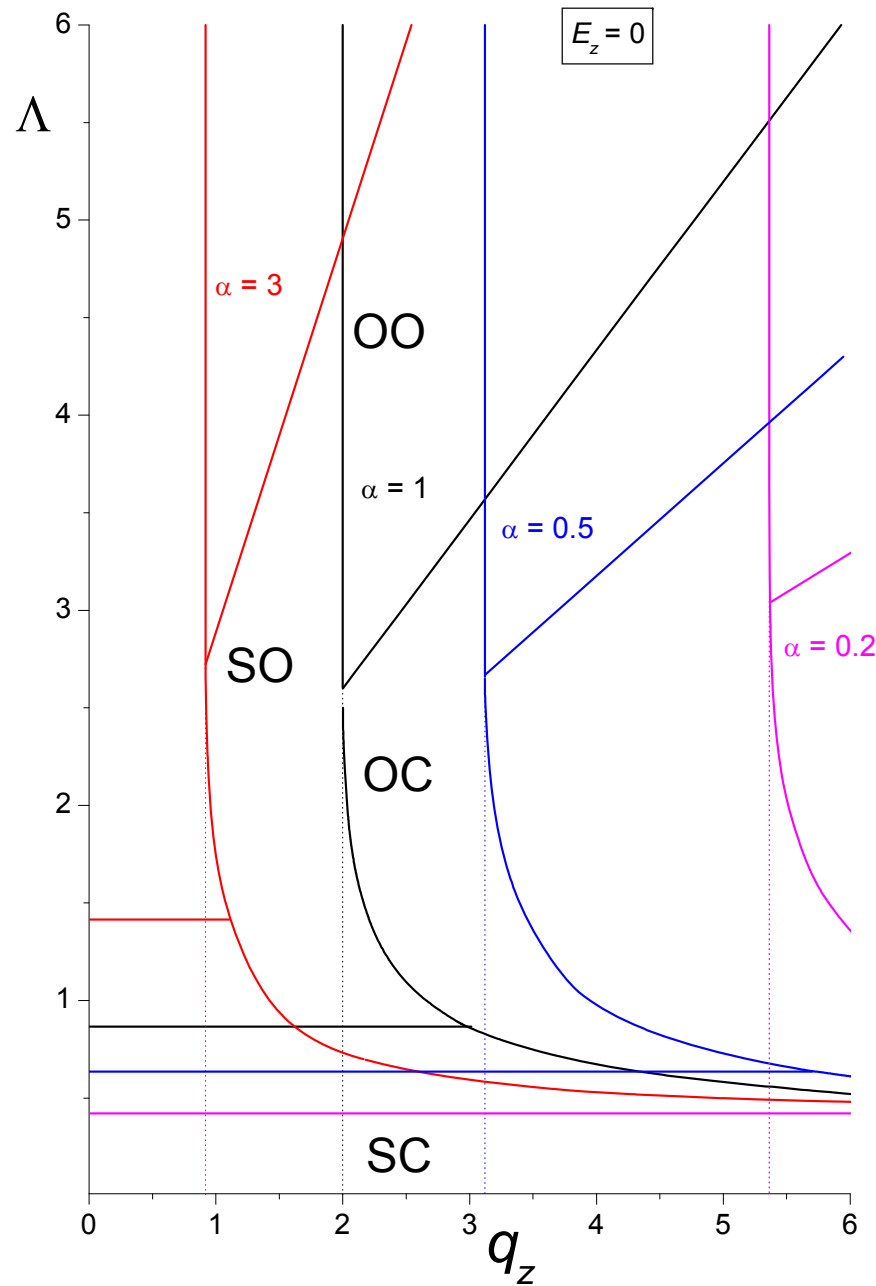
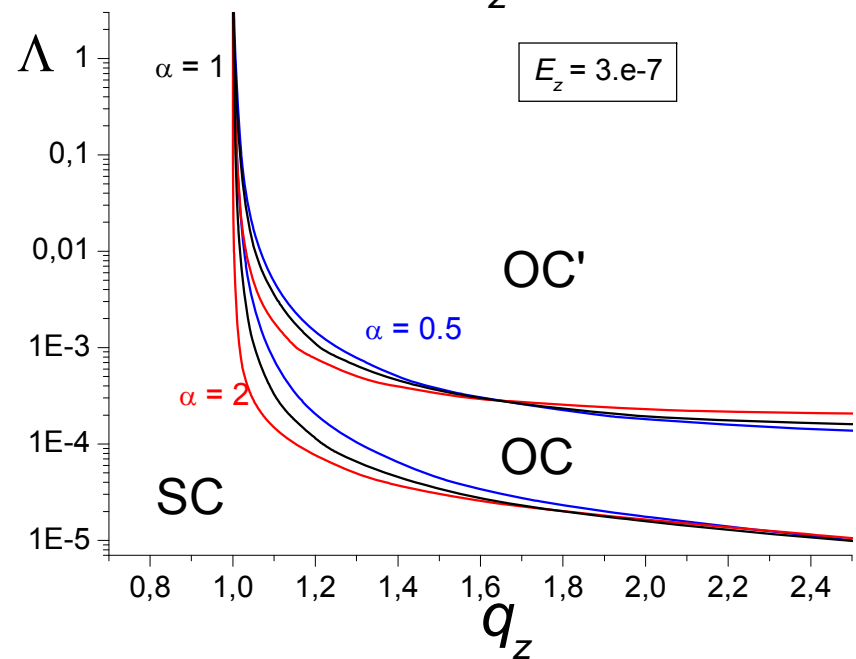
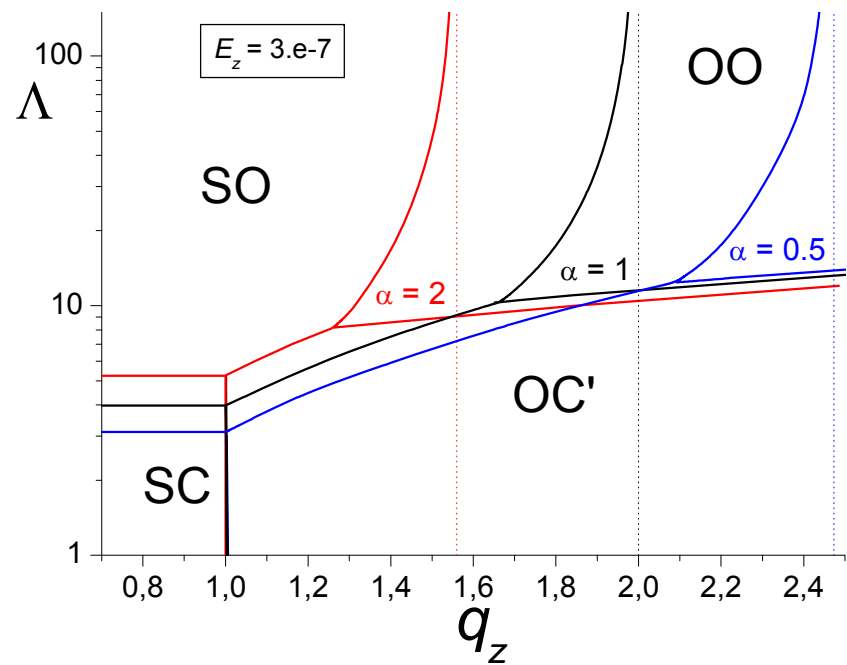
a následným zavedením malého parametra $\varepsilon = \pi^2 E q(q-1) / \Lambda = O(E / \Lambda)$

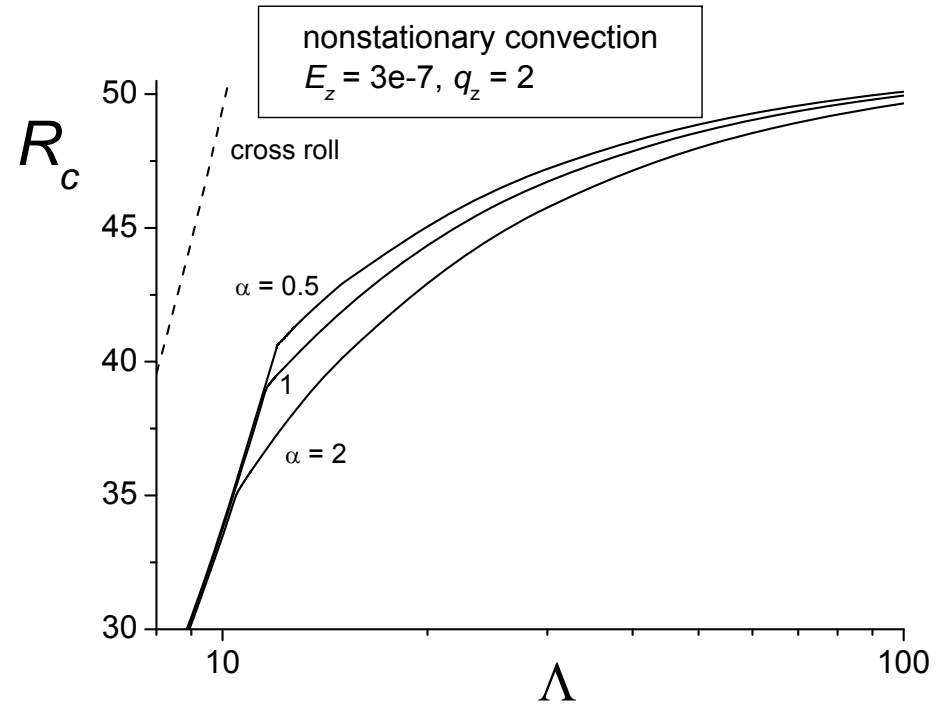
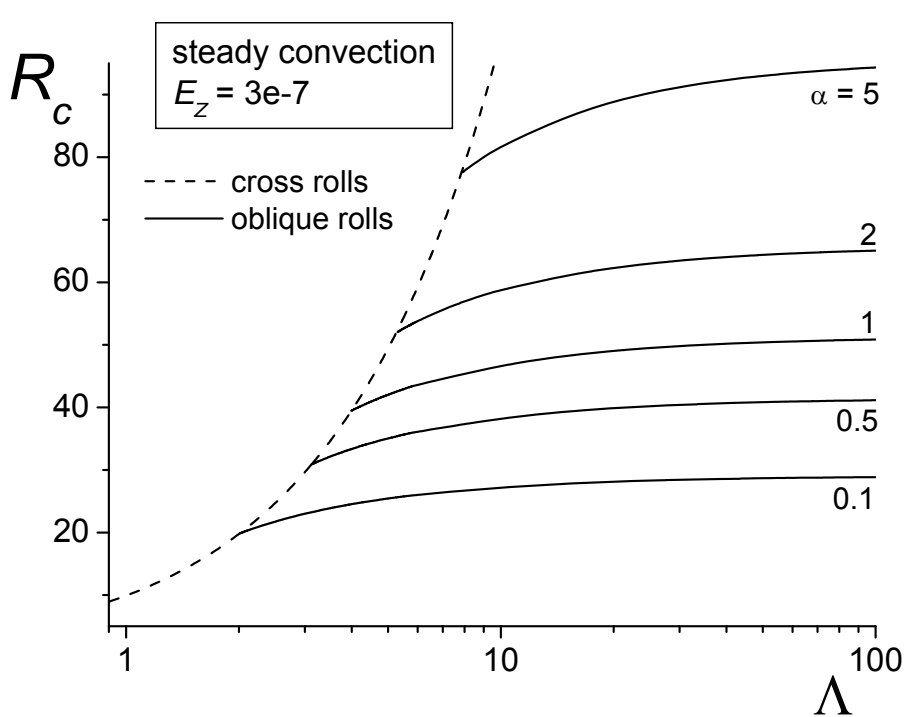
sme vyjadrili dôležité parametre OC' modov (vlnové čísla, Rayleighove číslo, frekvencia)

v tvare mocninového radu podľa mocnín $\varepsilon^{1/3}$.

Zhoda s numericky získanými hodnotami je veľmi dobrá, ak ε je dostatočne malé.



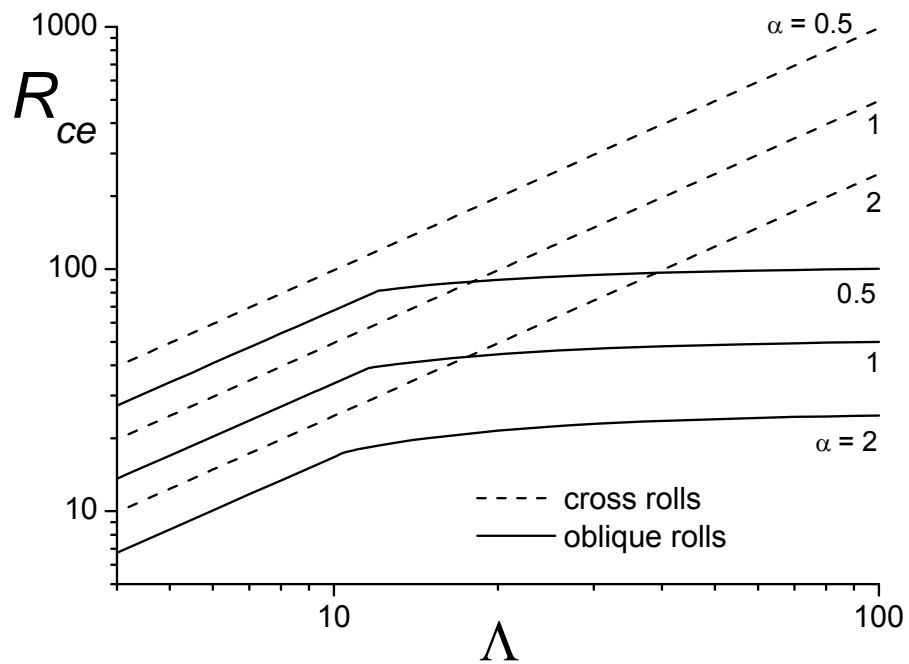
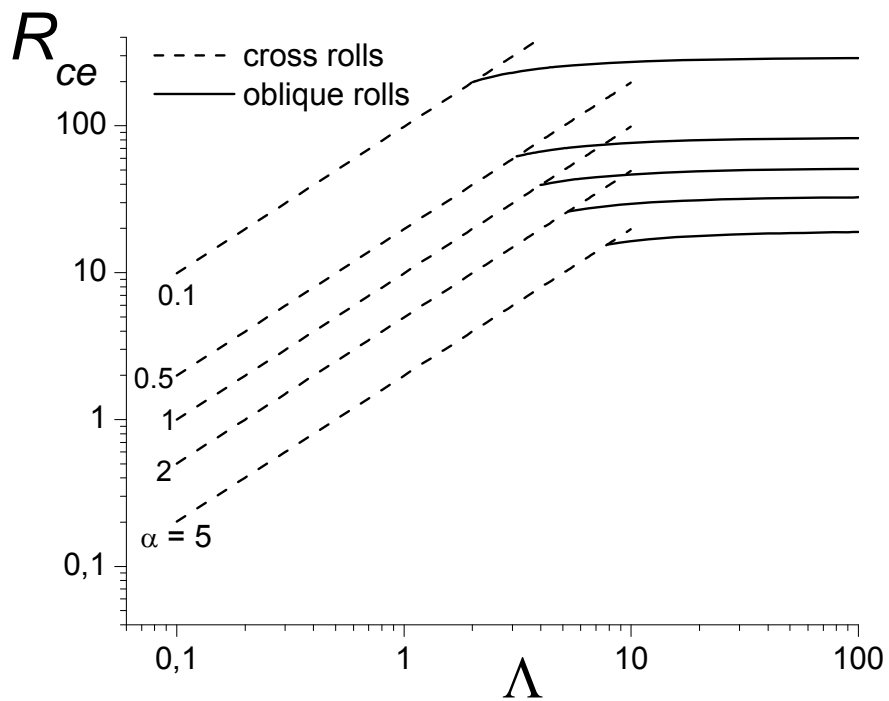
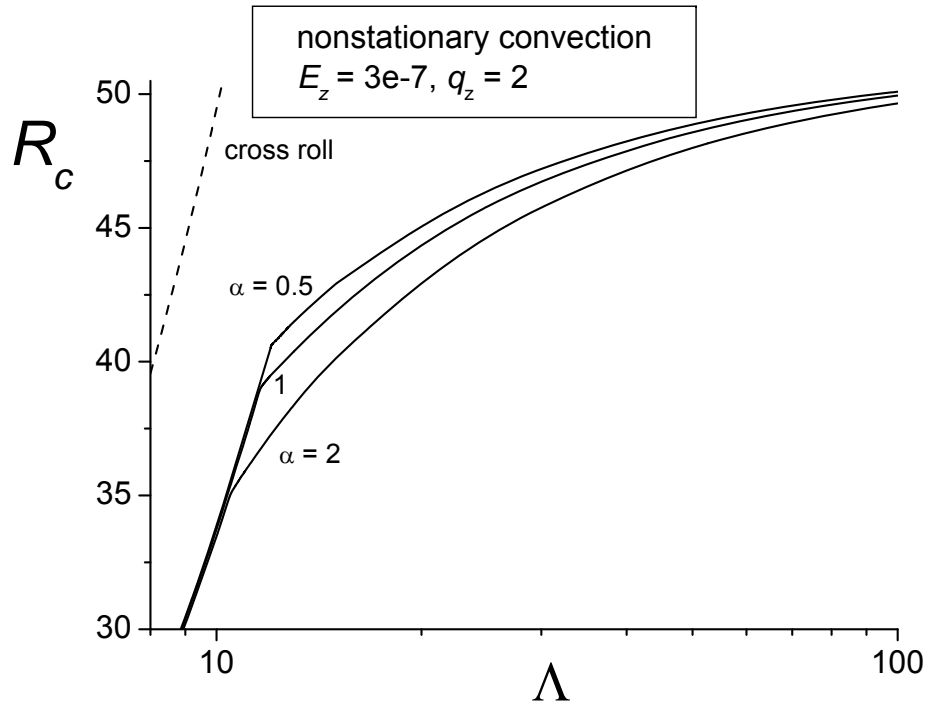
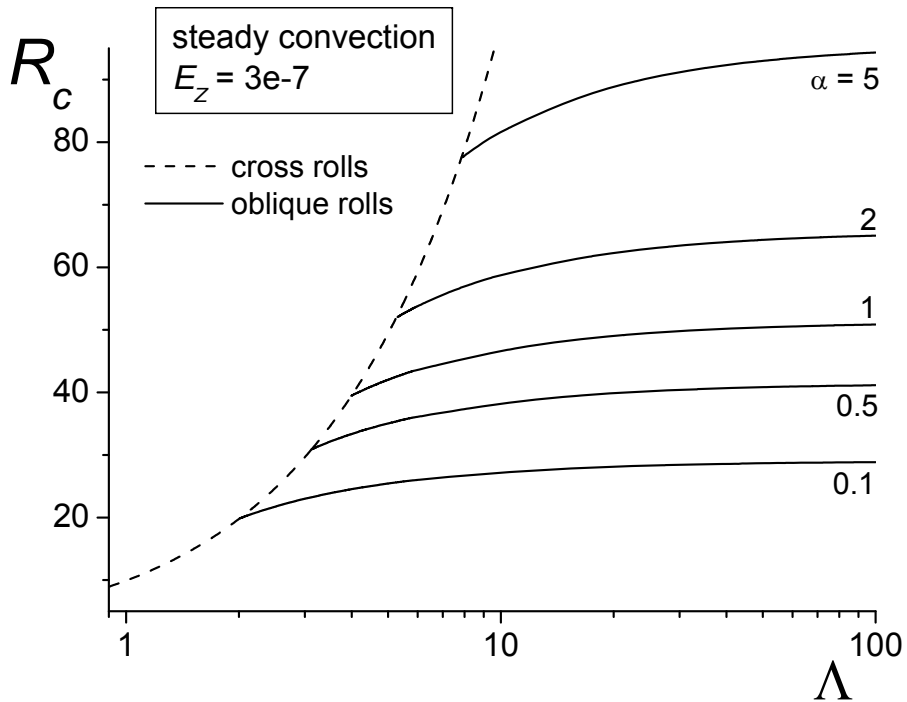




V prípade horizontálnej rotačnej osi má anizotropia na stacionárnu a nestacionárnu konvekciu vo forme šikmých roliek kvalitatívne **opačný** vplyv.

Anizotropia, ktorá uľahčuje **stacionárnu** konvekciu (**zmenšuje** R_c), sťažuje **nestacionárnu** konvekciu (**zväčšuje** R_c) a naopak.

$$R = \frac{\alpha_T g \Delta T d}{2\Omega_0 \mathbf{K}_{zz}} \rightarrow R_{eff} = \frac{\alpha_T g \Delta T d}{2\Omega_0 \mathbf{K}_{xx}} = \frac{R}{\alpha}$$



Závery

Vyšetrovali sme vplyv anizotropie difúzných koeficientov
na model rotujúcej magnetokonvekcie
v horizontálnej vrstve rotujúcej okolo horizontálnej rotačnej osi

Nové poznatky aj v izotropnom prípade.

Coriolisova sila má vďaka rotácii okolo horizontálnej osi
výrazne odlišný vplyv na nástup konvekcie v tvare horizontálnych roliek

Existencia nových módov OC' ,
ktoré sú takmer kolmé na magnetické pole,
a ktoré neexistujú v neviskóznom prípade.

Anizotropia má na stacionárne a nestacionárne módy
kvalitatívne opačný vplyv
ako v podobnom modeli s vertikálnou rotačnou osou.