

Úvod do fyziky Zeme/ Základy fyziky Zeme

Prednáška pre poslucháčov bakalárskeho štúdia

2. časť- úvod do geodynamiky (tvar a pohyby Zeme)

Adriena Ondrášková

- Gravitačné pole a tvar Zeme
- Slapy
- Pohyby Zeme: rotácia, zmeny smeru rotačnej osi, obeh okolo Slnka

Literatúra:

Brázdil R. a kol.: Úvod do studia planety Země, SPN, Praha 1988

Prigancová A., Hvoždara M.: Zem – naša planéta, VEDA, vyd. SAV, 1989
(vybraté partie – kapitola 1 a 2)

*Milan Hvoždara: NAŠA ZEM pevná i premenlivá, VEDA, vyd. SAV,
Bratislava 2012 (kapitola 2)*

GRAVITAČNÉ POLE A TVAR ZEME

1. Tvar Zeme, jej rozmery a hmotnosť

- a) Guľa - určenie polomeru – Eratosthenes 3.st. pr.n.l.
- b) Určenie hmotnosti Zeme
- c) Neskoršie merania rozmerov – sploštený tvar

2. Gravitačné a tiažové zrýchlenie

- a) Gravitačné zrýchlenie na nerotujúcej guli
- b) Rotácia -> tiažové zrýchlenie

3. Tvar a tiaž sú spojené cez tiažový potenciál

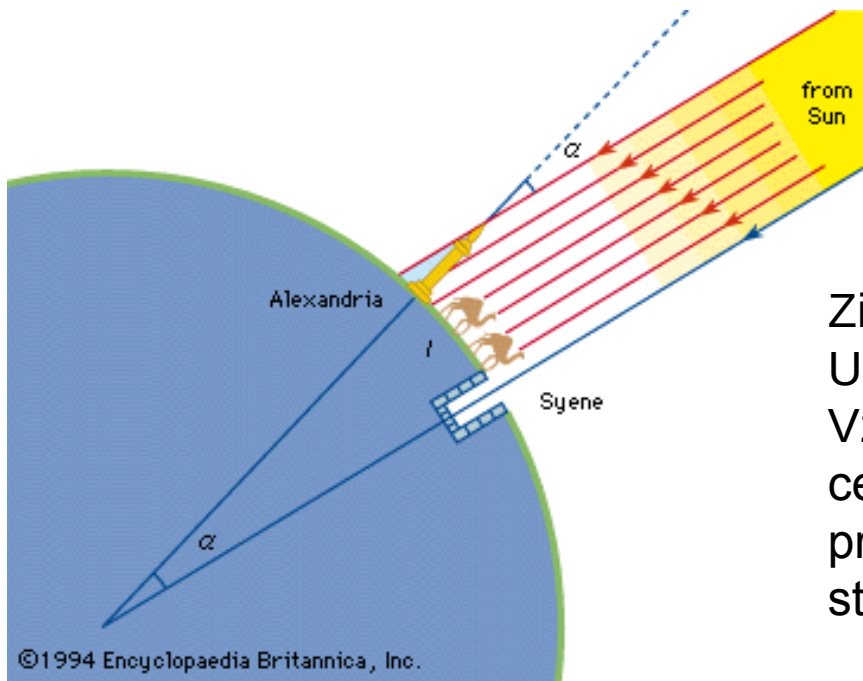
- a) Potenciál
- b) Rotačný elipsoid
- c) Teleso obecného tvaru
- d) Geoid a referenčný elipsoid
- e) Určovanie parametrov gravitačného potenciálu
- f) Tvar Zeme vplýva na pohyb družíc

4. Referenčné elipsoidy

- a) Používané referenčné elipsoidy
- b) Používané vzorce pre tiaž na elipsoide

1a. ERATOSTHENES

- Born at Cyrene 275 BC
- Studied at Alexandria and Athens
- Appointed Director of the Alexandrian Library 236 BC
- Got blind 195 BC
- Starved himself to death 194 BC



$$\frac{2\pi R}{360^\circ} = \frac{l}{\alpha}$$

Zistil:

Uhol $\alpha = 7^\circ 12'$

Vzdialenosť l odvodil z poznatku, že cesta zo Syeny do Alexandrie trvá ťave 50 dní pričom ťava prejde denne v priemere 100 stádií.

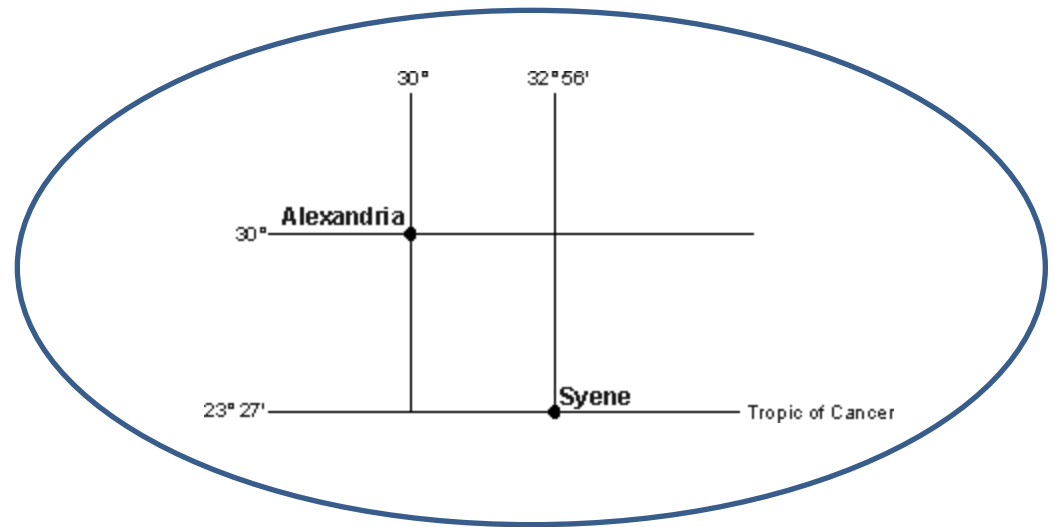
Vyšlo mu $R \approx 7000 \text{ km}$

Na tie časy malá chyba.

1a. ERATOSTHENES

Prečo mu vyšiel o 10 % väčší výsledok?

Syena – dnes Assuán



The distance between Alexandria and Syene is 729 km, not 800;
The two cities are not on the same meridian (the difference in longitude is 3°);
Syene is not on the Tropic of Cancer (it is situated 55 km farther North);
The angular difference is not $7^\circ 12'$ but $7^\circ 5'$.

1b. URČOVANIE HMOTNOSTI ZEME

O odhady hmotnosti (a priemernej hustoty) Zeme sa usilovali už v 18.stor. – bez znalosti číselnej hodnoty gravitačnej konštanty **G**.

Pierre Bouguer (1738) a Nevil Maskelyne (1774) merali odklon zvislice (olovnice) v blízkosti horských masívov (prvý v blízkosti sopky Chimboraso v Chile (6268 m – obr. vľavo), druhý pri hore Schiehallion v Škótsku (1083 m - obr. vpravo):



Podstatný je **odhad hmotnosti horského masívu** - objem z tvaru a rozmerov masívu, hmotnosť z priemernej hustoty hornín – z **výchyľky olovnice od astronomickej vertikály** (menej ako 1 oblúčková minúta) sa môže určiť **pomer hmotností celej Zeme a horského masívu**.

Merania neboli (a ani nemohli byť) presné, odchýľky činili 15 – 20 %. Dôležitý výsledok ale bol:

Hustota materiálu vo vnútri Zeme musí byť **podstatne väčšia ako hustota hornín na povrchu** (v priemere $2700 - 3200 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) => **existencia zemského jadra o veľkej hustote.**

1b. URČOVANIE HMOTNOSTI ZEME

Úloha je mimoriadne jednoduchá - *ak poznáme hodnotu Newtonovej gravitačnej konštanty G* :

$$g_0 = Gm_{\text{Earth}}/r_{\text{Earth}}^2 \approx 9.81 \text{ m/s}^2$$

Stačí použiť hodnotu gravit.zrýchlenia na povrchu ($g_0 \sim 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$), polomer Zeme ($r_{\text{Earth}} \sim 6,378 \cdot 10^6 \text{ m}$) a hodnotu Newtonovej gravitačnej konštanty ($G \sim 6,67428 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ - *doteraz najpresnejšie určená hodnota*) a dostaneme pre hmotnosť Zeme $m_{\text{Earth}} \sim 5,979 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, z toho vyjde **priemerná** hustota Zeme **$5502 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$** .

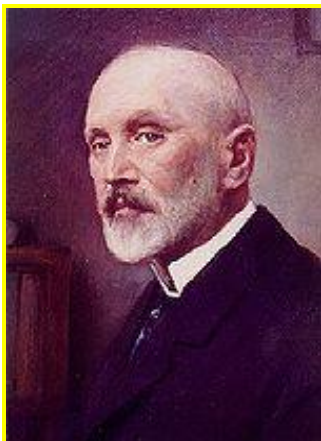
Hodnotu G určil prvýkrát (približne – na $6,75 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ v dnešných jednotkách) až Henry Cavendish v sérii experimentov s **torznými váhami** počas rokov 1798 – 1801 ▼



◀ K dvom telieskam rovnakej hmotnosti, vyváženým na rovnoramenných váhach, približoval striedavo z jednej aj druhej strany dve olovené gule (s hmotnosťou cca 160 kg) a **meral torzný moment** na závese. Aby vylúčil rušivé vplyvy, aparátúra bola umiestnená v uzavretej miestnosti a výchylky závesu sledoval cez okno ďalekohľadom. Mnohonásobné opakovanie experimentu dalo hodnotu G s chybou iba 2 % !

Ilustrácie ku Cavendishovmu experimentu s **torznými váhami**: ▶

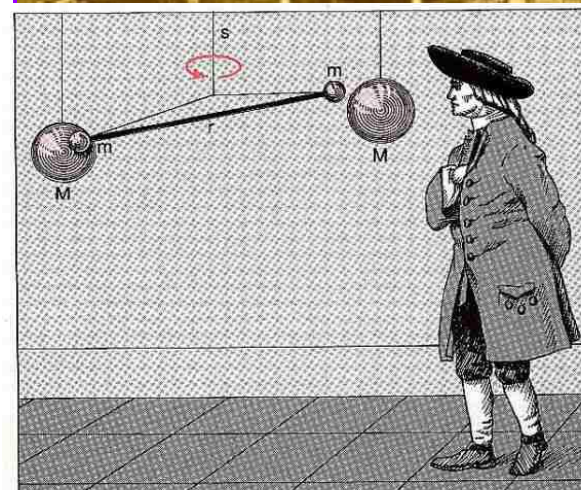
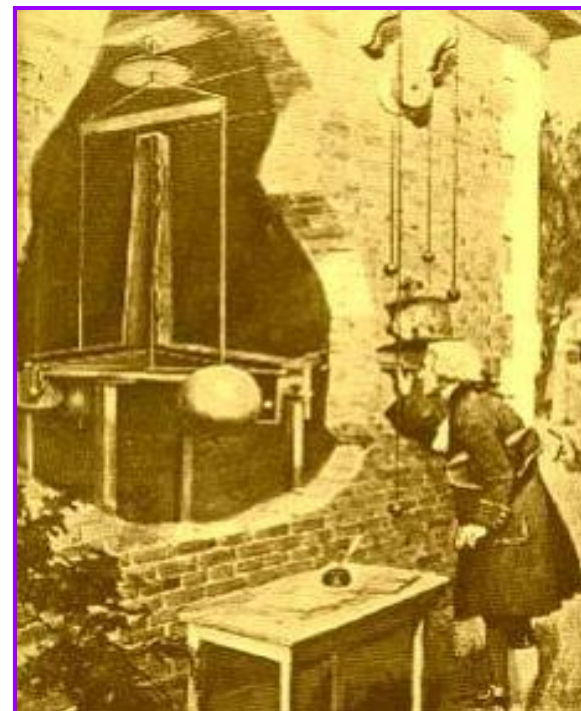
Merania torznými váhami podstatne spresnil **Lóránd ▼ Eötvös** (v rokoch 1906 – 1911) v Budapešti.



Lóránd Eötvös (1848 – 1919) bol profesor fyziky na budapeštianskej univerzite (istý čas bol ministrom školstva v uhorskej vláde).

Slávu mu priniesli merania k potvrdeniu *tzv. slabého princípu ekvivalencie*.

Slabý princíp ekvivalencie vyjadruje **rovnosť gravitačnej hmotnosti** (ktorá budí okolo seba gravitačné pole podľa Newtonovho zákona) **a zotrvačnej (inerciálnej) hmotnosti** (koeficient úmernosti medzi silou a zrýchlením v 2. pohybovom zákone). Ináč povedané všetky telesá sa v **tom istom gravitačnom poli** pohybujú s **rovnakým zrýchlením**. Eötvös preveril princíp s relatívnou presnosťou **10^{-9}** (súčasná merania na **10^{-13}**).

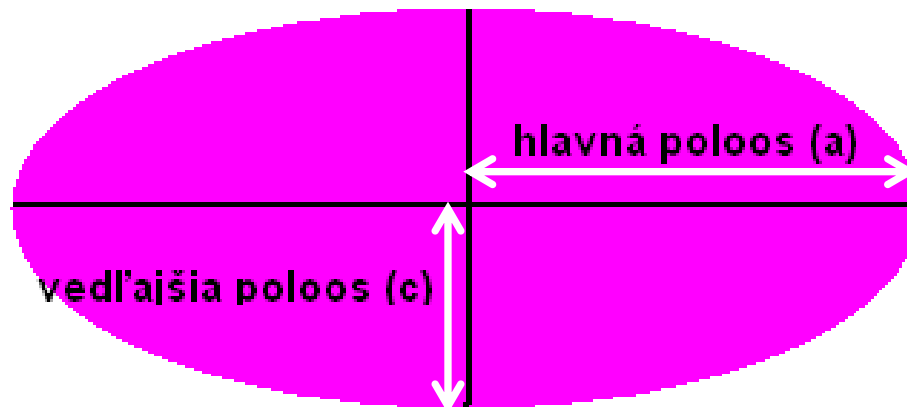


m – Testovacie závažíčka ,
M – „budiče“ gravitač. poľa
(olovené gule) .

1c. Novodobé merania rozmerov Zeme

Isaac Newton (1643 - 1727) vysvetlil, že na rovníku je najväčšia odstredivá sila, teda trochu znižuje gravitačnú príťažlivosť. Tam je Zem vydutá – odhadol sploštenie (flattening) rotačného elipsoidu na 1/230.

Definícia sploštenia: $\alpha \equiv f = \frac{a - c}{a} = 1 - \frac{c}{a}$ hodnota podľa Newtona, $\alpha = \frac{1}{230}$



Dnes pre model
WGS84

$$\alpha = \frac{1}{298,257}$$

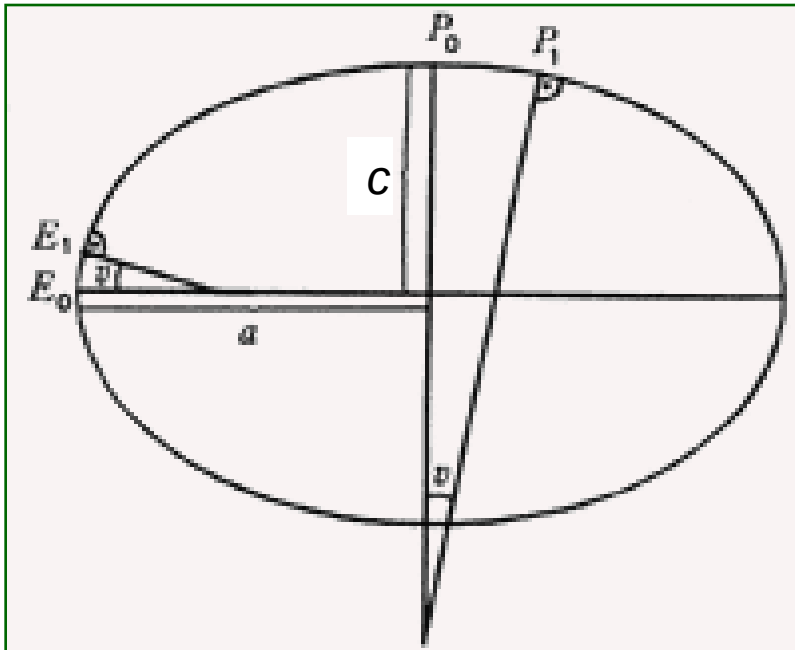
$$a = 6378,137 \text{ km}$$

$$c = 6356,752 \text{ km}$$

1c. Novodobé merania rozmerov Zeme

Novodobé merania sú založené na **určení dĺžky uhlového stupňa** (prvý J. Fernel 1525 a ďalší). Francúzske merania počínajúc r.1669, najznámejšie expedície viedli Pierre Bouguer a La Condanime 1735-45 v Peru Pierre Maupertuis 1736-37 v Laponsku (zúčastnil sa aj Andres Celsius)

– potvrdenie sploštenia Zeme – presnejšie priblíženie **rotačným elipsoidom**.
Postupne boli ďalej spresňované.



Krivosť (polomer krivosti) elipsy M pozdĺž poludníka sa mení so šírkou ϕ

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{1.5}}$$

$$\text{kde } e^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}$$

je excentricita elipsy

1c. Novodobé merania rozmerov Zeme

Na podnet astronóma Fridricha von Struveho, ktorý pracoval na astronomickom observatóriu v estónskom Tartu bol vytýčený Struveho geodetický oblúk (**Struve geodetic arc**).

Cieľ – presne zmerať dĺžku poludníka $26^{\circ}43' E$

(časť dlhú $25^{\circ}20' \sim 2822 \text{ km}$)

od Fuglenes v mestečku **Hammerfest** neďaleko nórskeho Nord Kappu

po Staro-Nekrasovka (Izmail) v ústí Dunaja do Čierneho mora.

Meranie v rokoch 1816 – 1855
spresnilo sploštenie Zeme

Pôvodný oblúk pozostával z 258 hlavných trojuholníkov s 265 staničnými bodmi.

Vo Fínsku boli využité body, ktoré vytýčila r. 1736-7 expedícia P. Maupertuisa .
10



Dodnes sa zachovalo
asi 34 označených
geodetických bodov.

Pre význam tohto
merania bol
Struveho oblúk
zapísaný r. 2005 do
zoznamu UNESCO



Tartu, Estonia

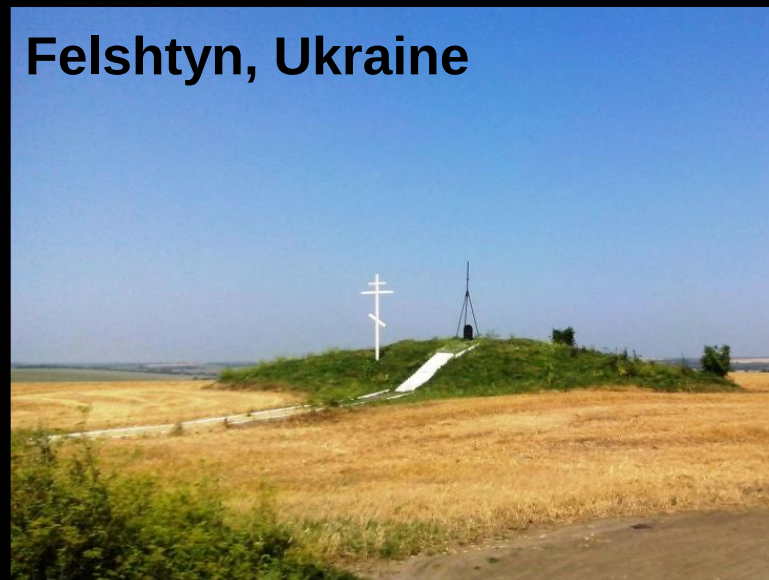


Hammerfest, Norway



Ostrov Hogland, Russia

Felshtyn, Ukraine



Meškonys, Litva

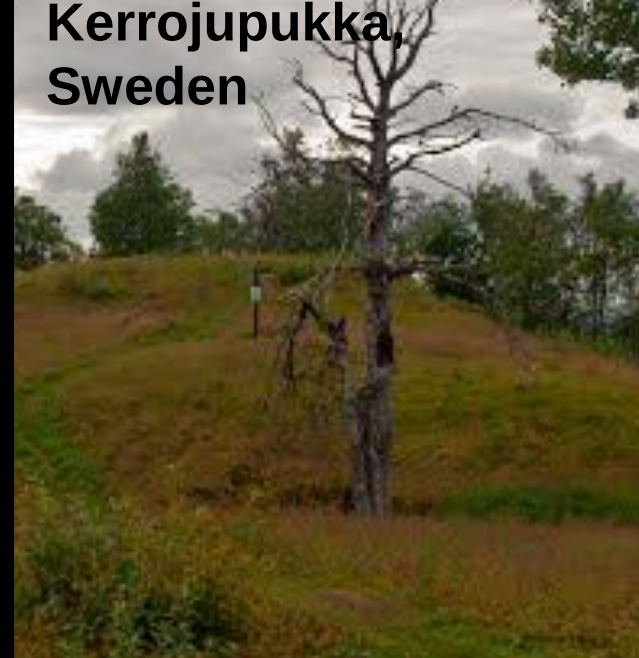


Lopaty, Belarus

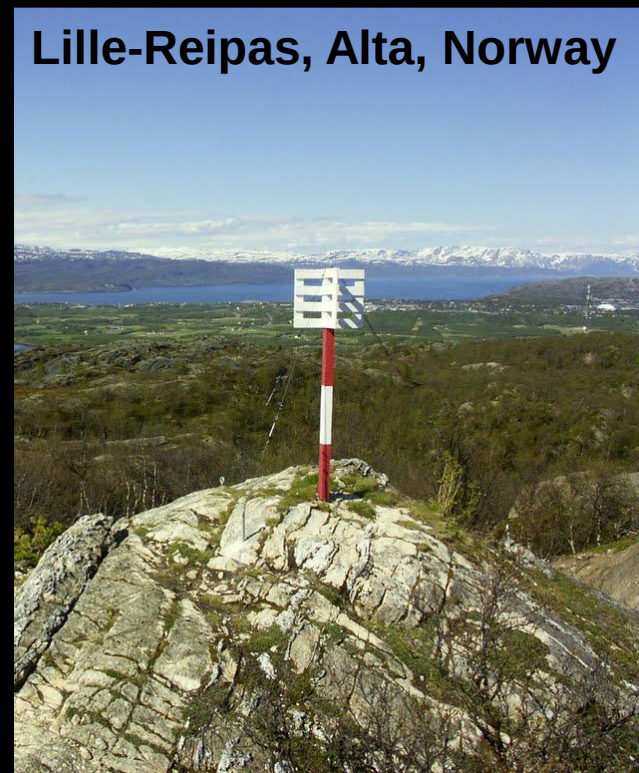


Chekutsk, Belarus

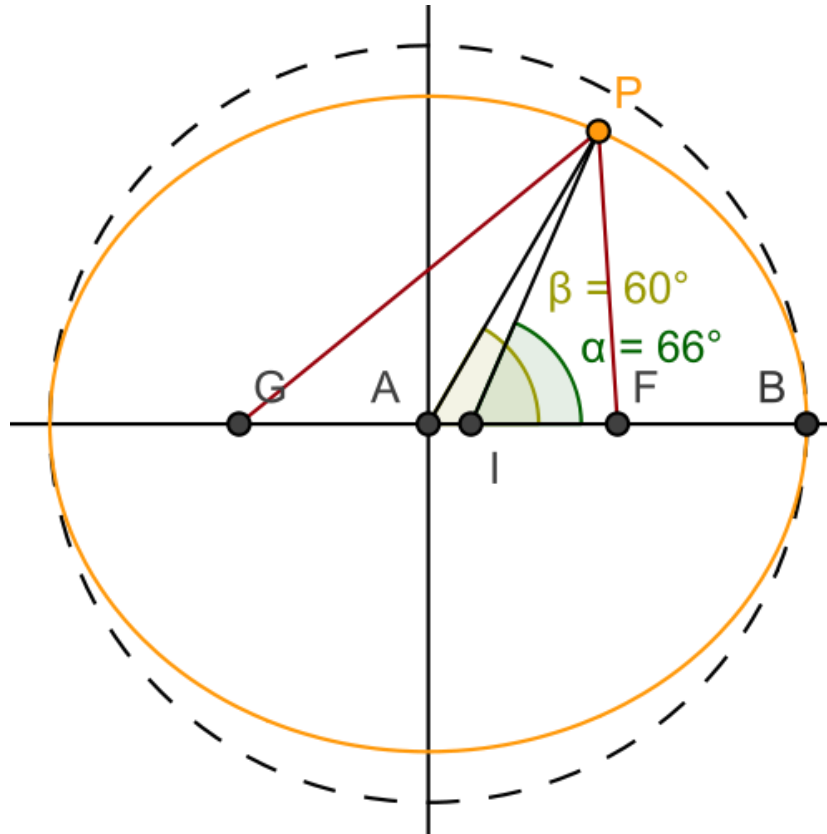
Kerrojupukka, Sweden



Lille-Reipas, Alta, Norway



Geocentrická a geodetická šírka



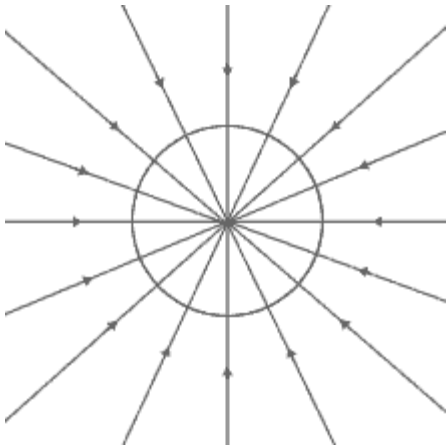
Poloha bodu P na sféroide má rôzny uhol pre **šírku** podľa toho, či sa uhol meria od **normály** (kolmice) **na povrch** (uhol α , **geodetická alebo geografická šírka**) alebo **má vrchol v strede Zeme** (uhol β , **geocentrická šírka**).

Geocentrická šírka sa používa pri práci s družicami.

Geografickú šírku používame v dennej praxi na povrchu sploštenej Zeme, lebo sa odvíja od vertikálneho a horizontálneho smeru.

Pozor. Sploštenie sféroidu na obrázku (oranžový) je väčšie než na skutočnej Zemi. Preto rozdiel medzi "geodetickou" šírkou α a "geocentrickou" šírkou β je nadsadený.

2. Gravitačné a tiažové zrýchlenie

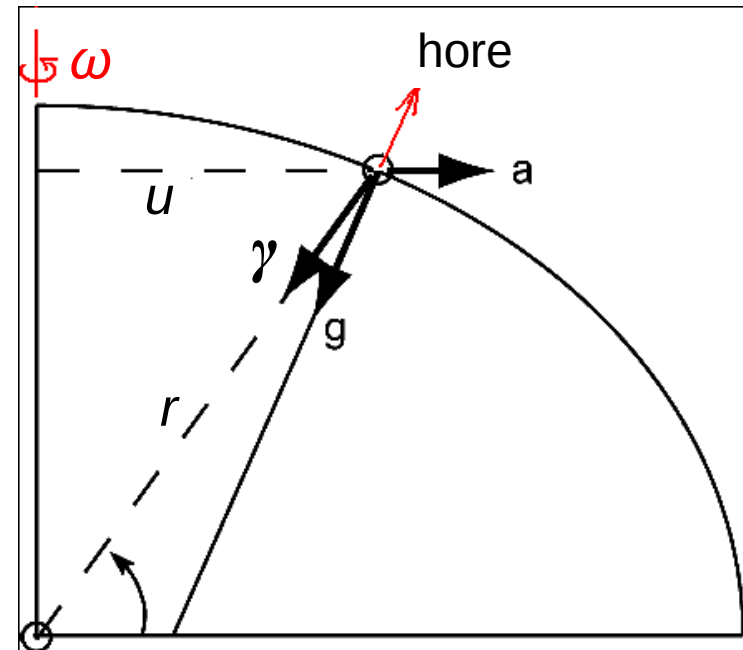
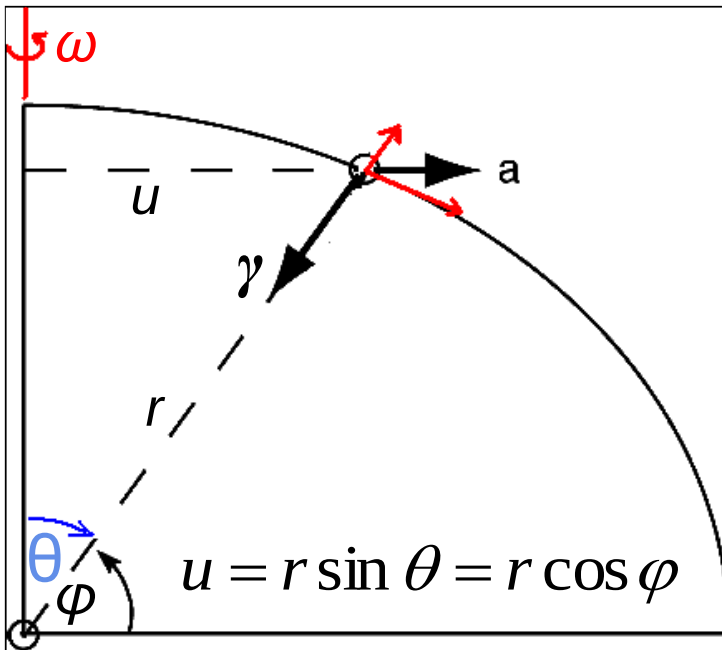


$$\gamma = \frac{GM}{r^2}$$

Na nehybnej guli s konštantnou hustotou (alebo $\rho = \rho(r)$) gravitačné zrýchlenie je kolmé na povrch gule a smeruje do stredu. Zem, ktorá by nerotovala a bola celá z rovnakej kvapaliny, by zaujala tvar gule.

Ak guľa rotuje, vzniká odstredivé zrýchlenie $a = \omega^2 u = \omega^2 r \sin \theta$

Tiažové zrýchlenie, alebo tiaž, je $g = \gamma + a$



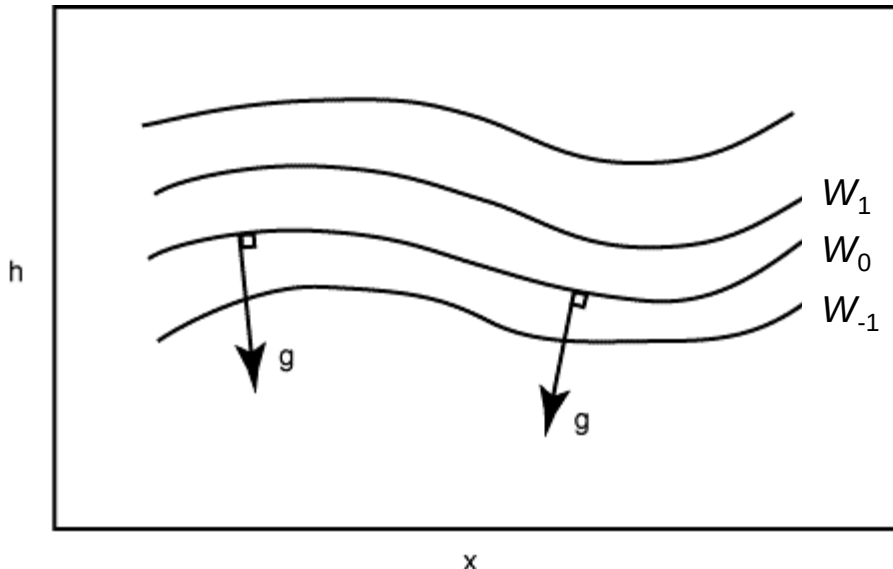
Tangenciálna zložka odstredivého zrýchlenia „ťahá“ hmoty k rovníku → sploštenie Telesá plastické, alebo tekuté (napr. more) sa snažia nadobudnúť tvar, aby tiažové zrýchlenie bolo kolmé na hladinu. Pri takej podobe na častice na hladine už nepôsobí sila, ktorá by hladinu deformovala. Tvarom takého telesa je „hladinová plocha“.

Ale pozor: sploštený tvar telesa má za následok, že gravitačné zrýchlenie $\gamma \neq \frac{GM}{r^2}$

3a. Potenciál

Gravitačné zrýchlenie je gradientom gravitačného potenciálu $\gamma = -\text{grad } V$
 Tiažové zrýchlenie je gradientom tiažového potenciálu, $\mathbf{g} = -\text{grad } W$,
 t.j. zrýchlenie $\mathbf{g}$ je kolmé na plochy rovnakého potenciálu (ekvipotenciálne plochy).
 Telesá padajú z miest, kde je väčší potenciál, do miest, kde je potenciál nižší.

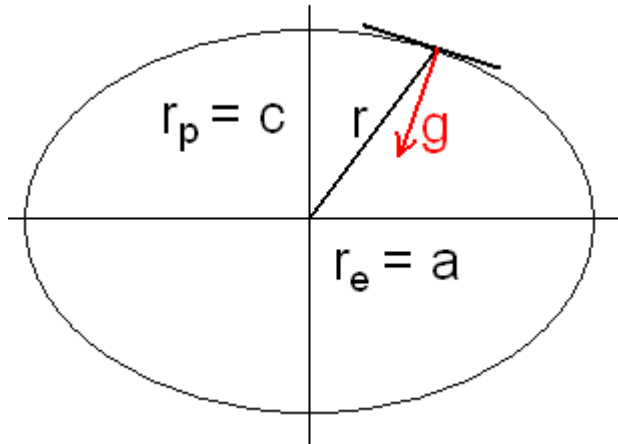
Na ekvipotenciálnej ploche je gradient $\mathbf{W}$ nulový, zrýchlenie je nulové, preto nepôsobí sila, ktorá by nútila častice premiestňovať sa. Je to výsledný tvar, ktorý zaujme teleso, ktoré sa môže deformovať. **Hladiny tekutín sú ekvipotenciálne plochy.**



◀ Hladiny rovnakého potenciálu $\mathbf{W}$ a zrýchlenie $\mathbf{g}$ (je vždy kolmé na hladiny).

3b. Rotačný elipsoid

Rotujúca homogénna tekutina nadobudne tvar rotačného elipsoidu



Zem sa javí ako tuhé teleso iba voči krátkodobým (krátkoperiodickým) silovým účinkom

Ak sily pôsobia milióny, či miliardy rokov, materiál Zeme sa správa ako viskózna tekutina

➡ Zem sa sploštila, podobne ako rotujúca tekutina

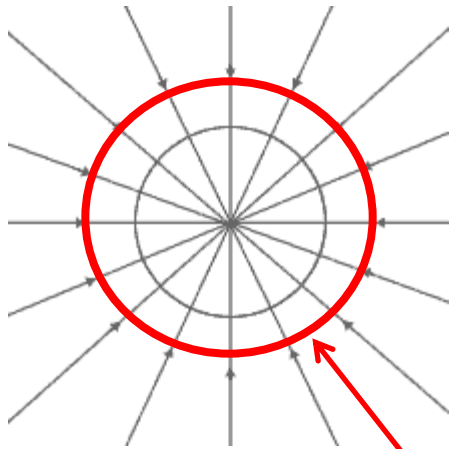
Vzdialenosť bodu na povrchu od stredu Zeme (ktorá vyzerá približne ako rotačný elipsoid) je

$$r = a(1 - \alpha \cos^2 \theta)$$

kde $\alpha = \frac{a - c}{a}$ je geometrické sploštenie

$\theta = 90 - \varphi$ je doplnok šírky

3b. Rotačný elipsoid

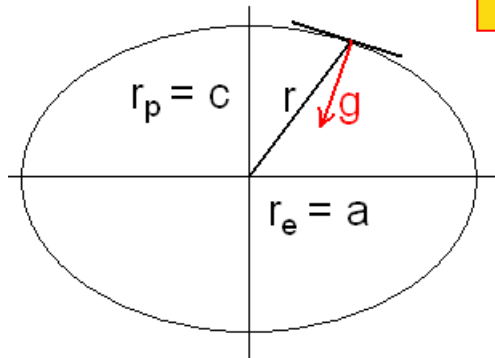


Potenciál homogénnej (koncentrickej) gule

$$V = -\frac{GM}{r}$$

Hladinové plochy
gravitačného potenciálu
homogénnej nerotujúcej gule
sú guľové plochy.

3b. Rotačný elipsoid



Tiažový potenciál rotujúceho elipsoidu

$$U = -\frac{GM}{r} \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 J_2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta$$

Gravitačný potenciál gule

Oprava gravitačného potenciálu
na to, že hmoty tvoria elipsoid

Potenciál odpovedajúci
odstredivému zrýchleniu

Tiažové zrýchlenie na rotujúcom elipsoide

$$g_0 = -\text{grad}U = -\frac{\partial U}{\partial n} \approx -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{GM}{r^2} \left[1 - 3 \left(\frac{a}{r} \right)^2 J_2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) - \frac{r^3 \omega^2}{GM} \sin^2 \theta \right]$$

$$g_{0\theta} = -\frac{\partial U}{r \partial \theta}$$

Tangenciálna zložka zrýchlenia dáva odchýlku maximálne 11'

J_2 je parameter, ktorý popisuje nakoľko je elipsoid sploštený.

Fyzikálny zmysel konštanty $J_2 = \frac{C - A}{Ma^2}$, kde **C**, **A** – polárny a rovníkový **moment zotrvačnosti**

3b. Rotačný elipsoid

Ak do predchádzajúceho vzťahu dosadíme

$$r = a(1 - \alpha \cos^2 \theta)$$

dostaneme pre tiažové zrýchlenie

na povrchu rotujúceho elipsoidu

$$\mathbf{g_0 = g_{0e} (1 + \beta \cos^2 \theta)}$$

Kde zrýchlenie
na rovníku je

$$g_{0e} = \frac{GM}{a^2} \left(1 + \alpha - \frac{3}{2} q \right) = \frac{GM}{a^2} (1 + \alpha) - \frac{3}{2} \omega^2 a$$

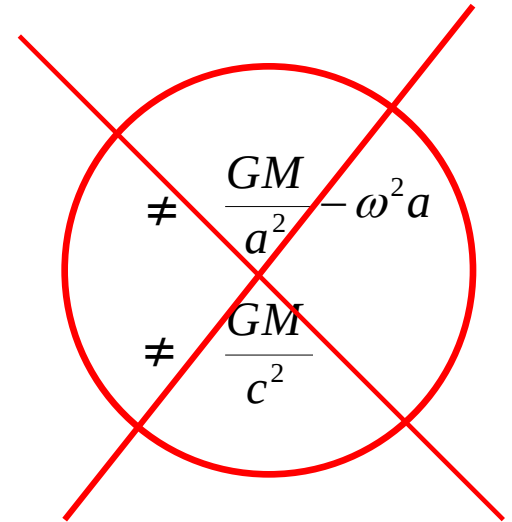
Na póle

$$g_{0p} = \frac{GM}{a^2} (1 + q) = \frac{GM}{a^2} + \omega^2 a$$

a tzv. gravitačné sploštenie $\beta = \frac{g_{0p} - g_{0e}}{g_{0e}} \approx 5.10^{-3}$

geometrické sploštenie $\alpha = \frac{a - c}{a} = 1/298,257222 \approx 3,3528.10^{-3}$

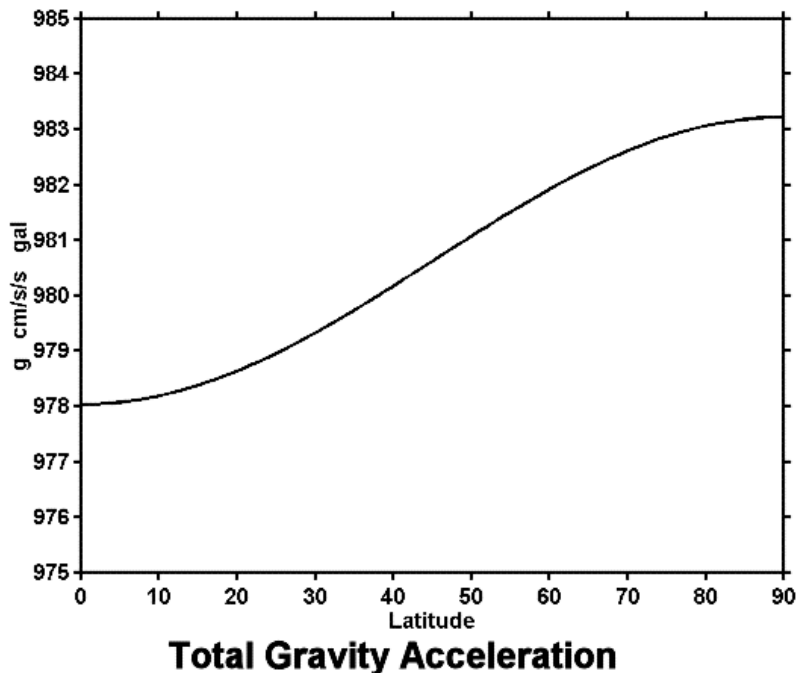
parameter $q = \frac{\omega^2 a}{\frac{GM}{a^2}} = \frac{\text{odstr. zrýchlenia na rov.}}{\text{grav. zrýchlenia na rov.}} = 3,4614.10^{-3}$



Najdôležitejšie je to, že $g_0 = g_{0e} (1 + \beta \cos^2 \theta)$, $\theta = 90 - \varphi$, pričom $\beta \approx 5 \cdot 10^{-3}$

V bežnom živote si zmeny g takmer nevšimneme.

Naša váha sa mení len o $5 \cdot 10^{-3}$ hodnoty, t.j. u 100 kg človeka o 0,5 kg.



◀ Obrázok ukazuje priebeh g_0 na povrchu **modelového elipsoidu**. g_0 nazývame **normálnou tiažou** (“nominal” or „normal“ gravity acceleration)

Skutočné hodnoty (i keď zredukované, t.j. prepočítané na hladinu mora) sa líšia od normálnych a ten rozdiel v geodézii voláme **anomália tiaže**:

$$\Delta g = g_{\text{zmerané zredukované}} - g_0$$

Anomálie tiaže, t.j. odchýlky od tohto jednoduchého zákona

- súvisia hlavne s nehomogenitami hlboko v Zemi
- súvisia s tvarom skutočnej Zeme (Zem nie je presne rotačným elipsoidom)
- ale aj ložiská nerastov spôsobujú merateľné odchýlky

3c. Teleso obecného tvaru

Tiažový potenciál rot. elipsoidu

$$W = -\frac{GM}{r} \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 J_2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta$$

a – rovníkový polomer,
 r – geocentrická vzdialenosť miesta,
 λ – zemepisná dĺžka, θ – doplnok šírky

$$P_2 = \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \quad \text{je druhý Legendrov polynóm}$$

Teleso obecného tvaru a ľubovoľného rozloženia hmôt v telese bude mať gravitačný potenciál

$$V = -\frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n J_n P_n(\cos \theta) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \right]$$

J_n , C_{nm} a S_{nm} sú parametre, ktoré popisujú nepravidelnosti rozloženia hustoty a nepravidelnosti tvaru telesa.

P_n sú Legendreove polynómy, resp. P_{nm} sú Legendreove pridružené funkcie

Ak člen s $P_2 = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$, ktorý vyjadruje polárne sploštenie, explicitne vyberieme

$$V = -\frac{GM}{r} \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 J_2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) - \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n J_n P_n(\cos \theta) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \right]$$

$P_n \approx 1$ a $P_{nm} \approx 1$ a blízko povrchu Zeme $\left(\frac{a}{r} \right)^n \approx 1$, preto

relatívna veľkosť J_n , C_{nm} a S_{nm} vyjadruje relatívnu dôležitosť jednotlivých členov radu.

Najväčší J_2

súvisí s rotačným sploštením

$$J_2 = 1082,645 \times 10^{-6}$$

$$J_4 = -1,649 \times 10^{-6}$$

$$J_6 = 0,646 \times 10^{-6}$$

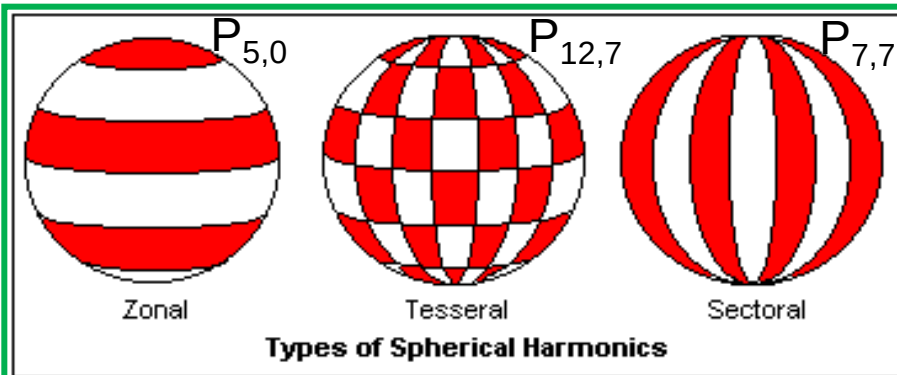
$$J_3 = -2,546 \times 10^{-6}$$

$$J_5 = -0,210 \times 10^{-6}$$

$$J_7 = -0,333 \times 10^{-6}$$

Sférické harmonické funkcie

Ukážky sférických harmonických funkcií (funkcie určené dvoma indexami, ktoré obsahujú Legendreove funkcie $P_{lm}(\cos \theta)$, v súčinoch s funkciami azimutálneho uhla Λ t.j. – $\cos(m.\Lambda).P_{lm}(\cos \theta)$ a $\sin(m.\Lambda).P_{lm}(\cos \theta)$)

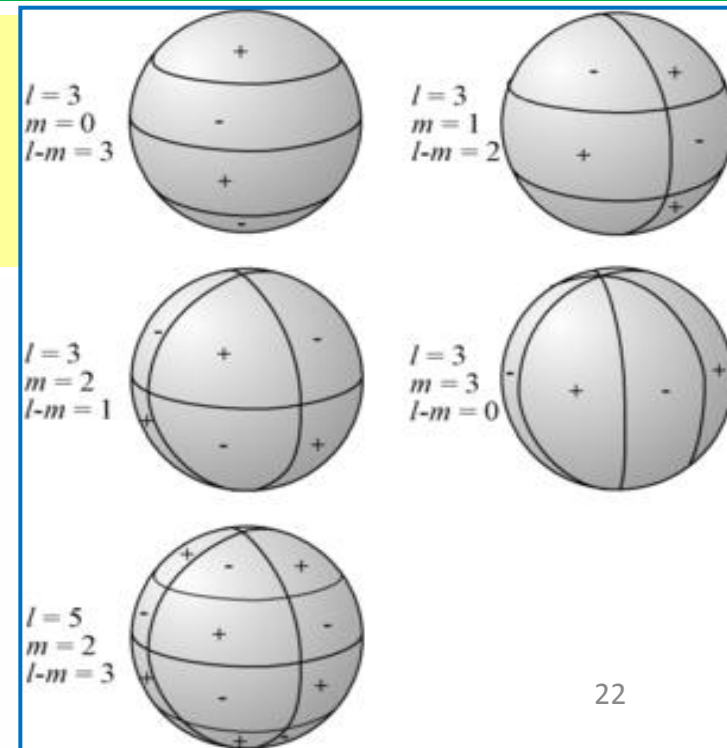
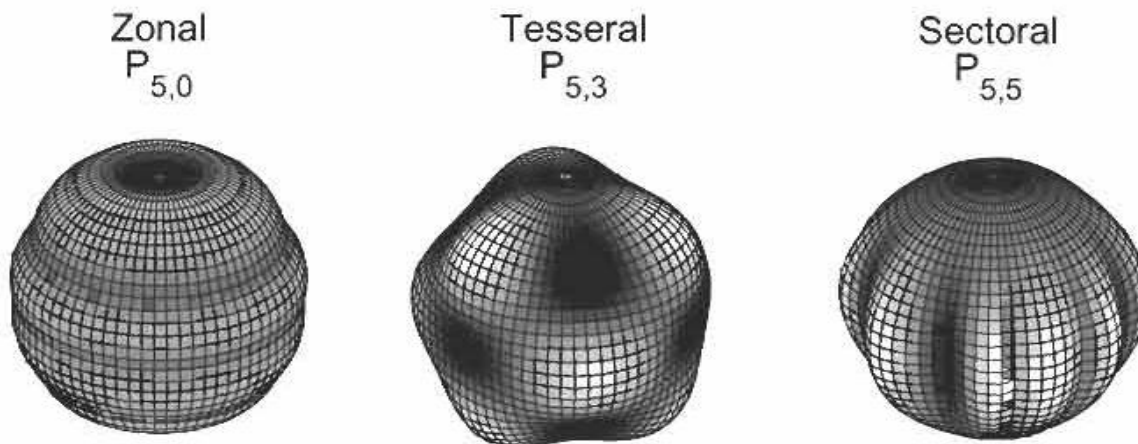


◀ Základné typy sférických harmonických:

- **zonálne** (nezávisia od azimutálneho uhla, $m = 0$);
- **teserálne** (index $0 < |m| < l$)
- **sektoriálne** (index $m = l$)

Červená a biela farba vyznačujú oblasti **kladnej**, resp. **zápornej** polaroty funkcií. Na poludníkoch a rovnobežkách medzi nimi má funkcia nulovú hodnotu.

Ako príklad máme znázornené (tieňovaním) tvary odpovedajúce trom sférickým harmonickým 5. stupňa ($l = 5$): **zonálna** ($m = 0$, nezávislá od azimutálneho uhla Λ), **teserálna** ($m = 3$) a **sektoriálna** ($m = l = 5$). ▼



3d. Geoid

Celý tiažový potenciál

$$W = V + V_{\text{odstredivý}}$$

$$W = V + V_{\text{odstr.}} = -\frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n J_n P_n(\cos \theta) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \right] + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta$$

Plochy, kde W = konšt. sú ekvipotenciálne plochy.

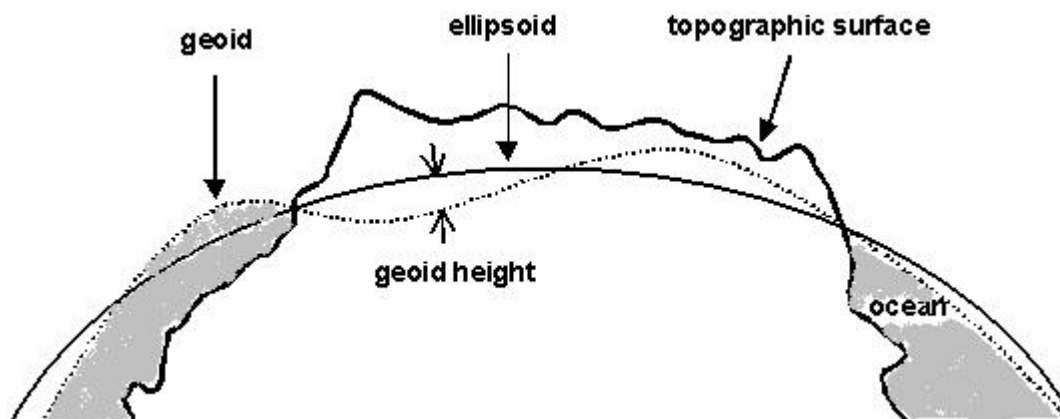
Tekutiny sa uložia tak, že ich povrch je ekvipotenciálna plocha (hladinová plocha).

Povrch tuhého telesa nemusí byť hladinová plocha. Keby bola, telesá by sa nekotúlali „dolu kopcom“.

Neexistovala by zložka zrýchlenia v smere svahu, celé g by bolo kolmé na povrch, t.j. do svahu, a „dole“ by znamenalo do svahu .

Pokojná hladina oceánov* je tiež jedna z ekvipotenciálnych plôch. (Na Zemi realizuje jednu ekvipotenciálnu plochu pokojná hladina oceánov – túto sme vybrali a nazvali **geoid**).

* oslobodená od prílivov, prúdení, vetrov, salinity, teploty...



Obrázok ukazuje elipsoid, geoid, a topografický povrch (povrch pevnín a hĺbku morí).

Referenčný elipsoid vyberáme tak, aby čo najlepšie reprezentoval skutočný tvar Zeme, t.j. aby bol čo najbližšie geoidu.

Potom sa geoid „vlní“ okolo elipsoidu.

Je vecou dohody, ako vyberieme referenčný elipsoid:

Ak chceme elipsoid jednoduchý, tak vezmeme len člen pre guľu, odstredivé zrýchlenie a najväčší opravný člen v rade, ktorý obsahuje J_2 , t.j. ktorý popisuje veľkosť polárneho sploštenia Zeme.

Avšak, čím viac sa má referenčný elipsoid priblížiť tvaru skutočnej Zeme (ku geoidu), tým viac opravných členov musíme použiť na jeho popis – 2, 4, 6...

Polohu ekvipotenciálnej plochy celého tiažového potenciálu W , ktorú nazývame **geoid**, určujeme ako výšky geoidu N nad referenčným elipsoidom.

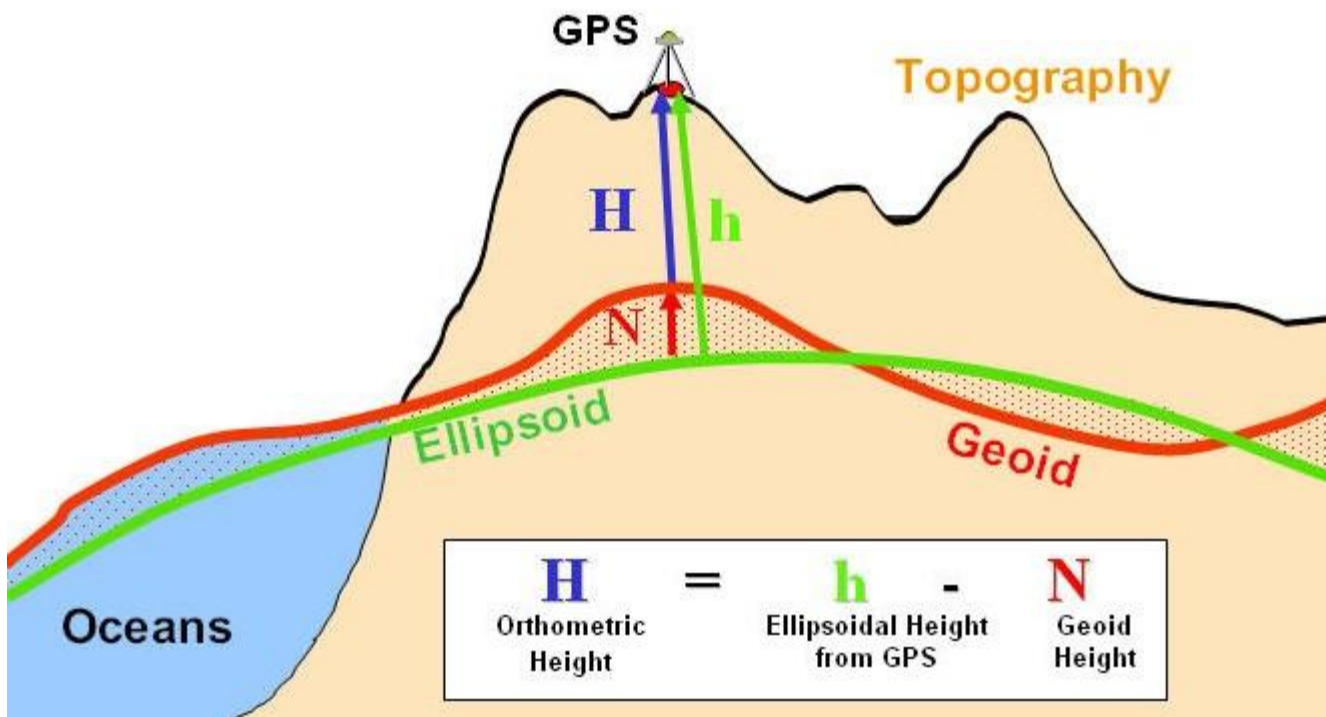
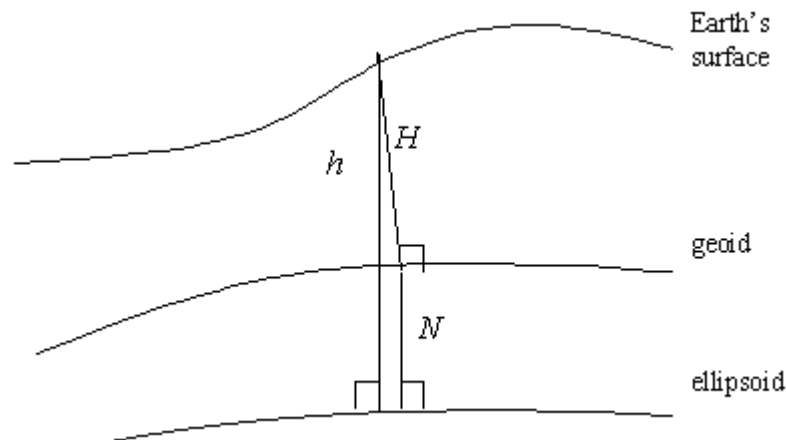
$$H = h - N$$

Ortometrická
(nadmorská)
výška

geodetická
výška
(od elipsoidu)

výška
geoidu
nad elipsoidom

(ortometrická výška sa meria **kolmo** na plochu geoidu
geodetická výška a výšky geoidu sú odčítané **kolmo** na
elipsoid.)



$$\text{Gravitačné anomálie } \Delta g = g_{\text{zmerané}} - g_0$$

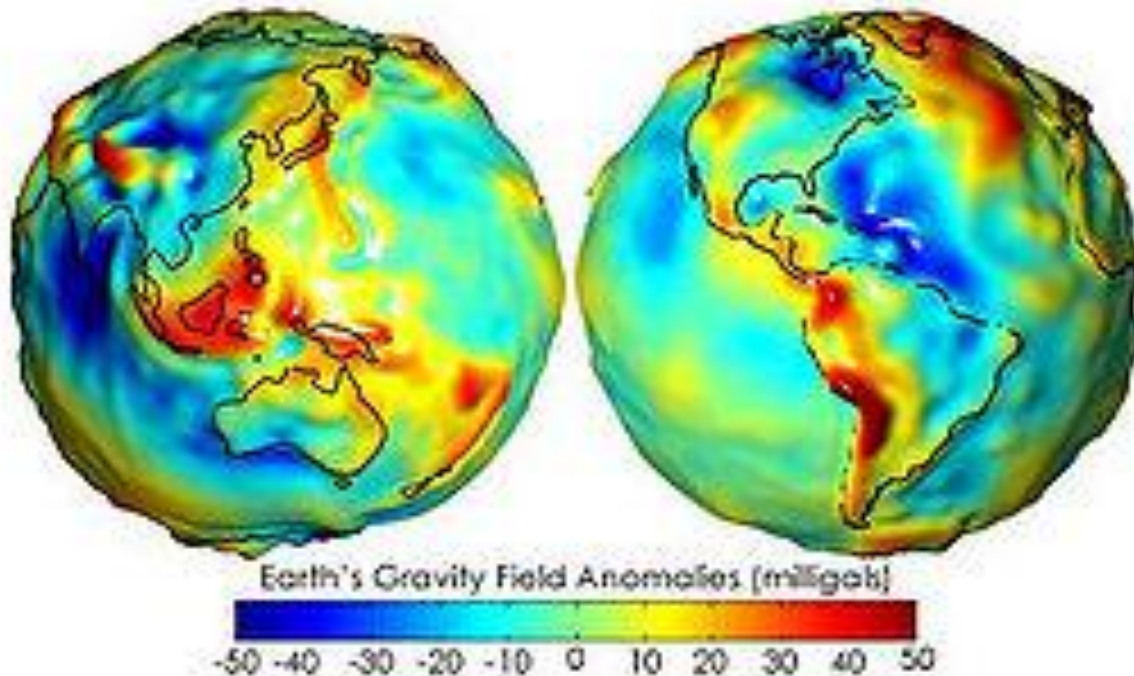
Obrázok dole „plasticky“ znázorňuje tzv. *anomálie zemského gravitačného poľa* - (a teda aj tiažového) v miligaloch (mgal) – **1 gal = 1 cm.s⁻²** alebo

$$\mathbf{1\ mgal = 0,000\ 01\ m.s^{-2}}$$

(priemerná hodnota *tiažového zrýchlenia* na povrchu Zeme je **9,81 m.s⁻²**).

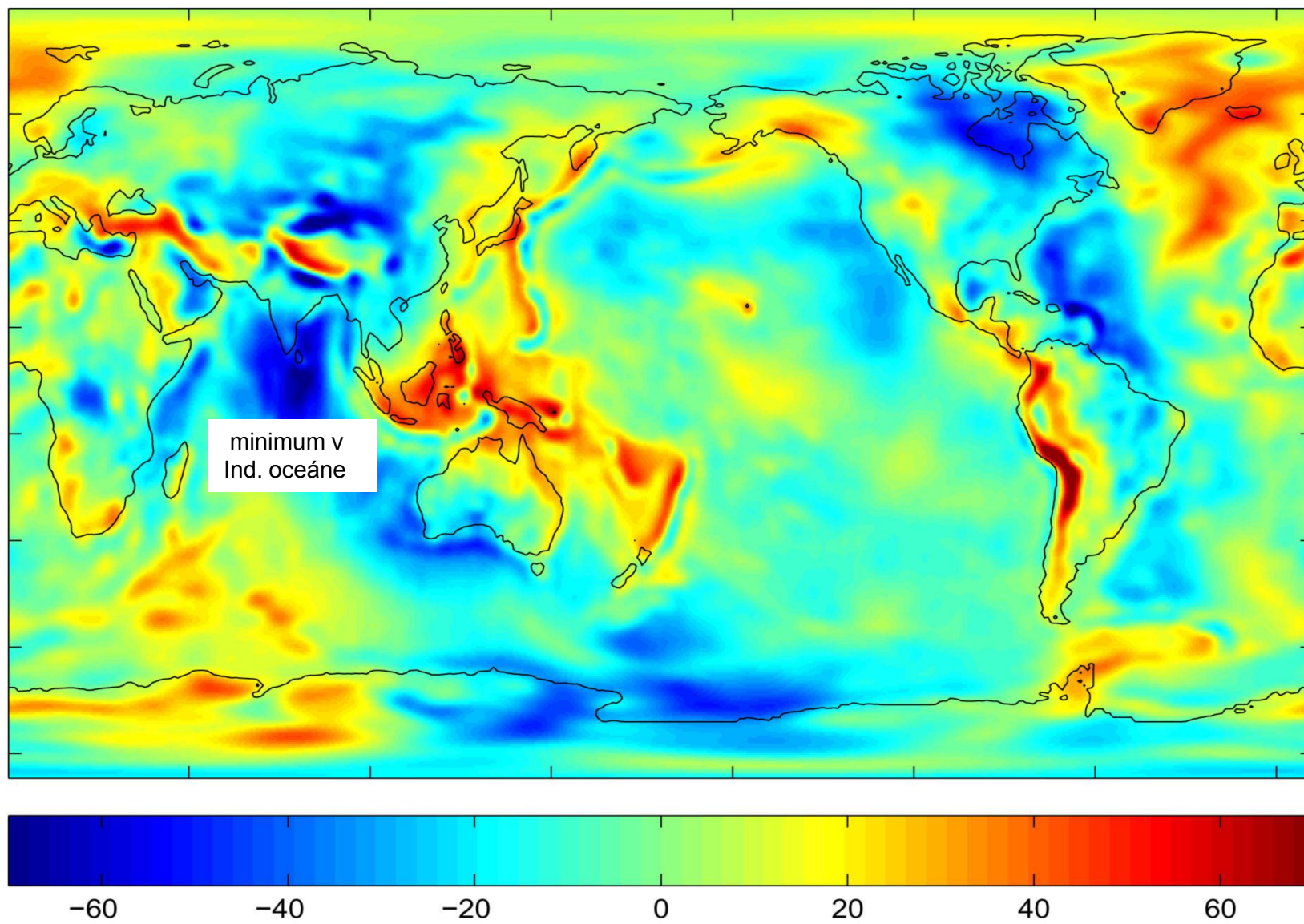
Ide teda o diferencie relatívneho rádu najviac **10⁻⁴**. Najväčšia záporná anomália je v oblasti **Indického oceánu**, kladné anomálie však neodpovedajú kontinentom!

Anomálie reflektujú *hustotné nehomogenity* v hlbinných zónach našej Zeme – v zemskom plášti.



Spomeňme si, že najjednoduchšie modelové g_0 je

$$g_0 = g_{0e} \left(1 + \beta \cos^2 \theta \right)$$



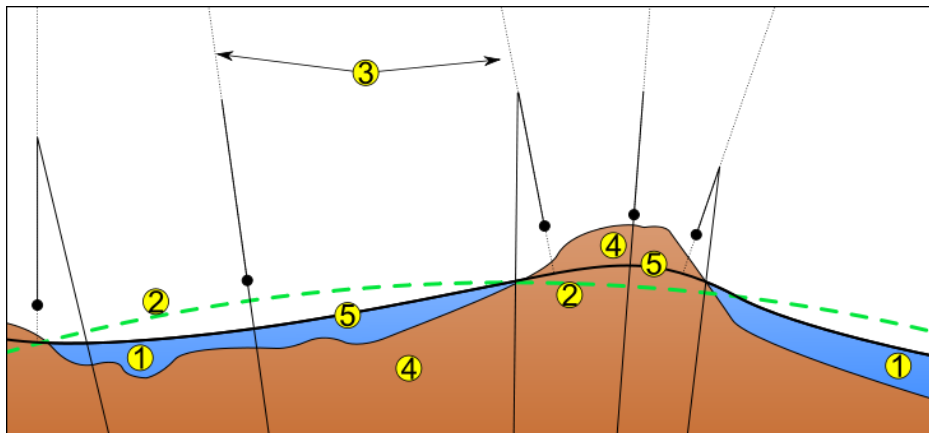
Gravitačná anomália v miligaloch ($1 \text{ mgal} = 0.000\,01 \text{ ms}^{-2}$) (rozdiel skutočnej tiaže na geoide oproti modelovému zrýchleniu na referenčnom elipsoide Zeme)

Prebytok hmôt sa prejaví výduťou ekvipotenciálnej plochy a teda by sme očakávali, že na kontinentoch bude geoid systematicky nad referenčným elipsoidom.

V skutočnosti prevýšenia geoidu nekorelujú s kontinentami. To svedčí o tom, že existuje určitá kompenzácia vrchných partií Zeme.

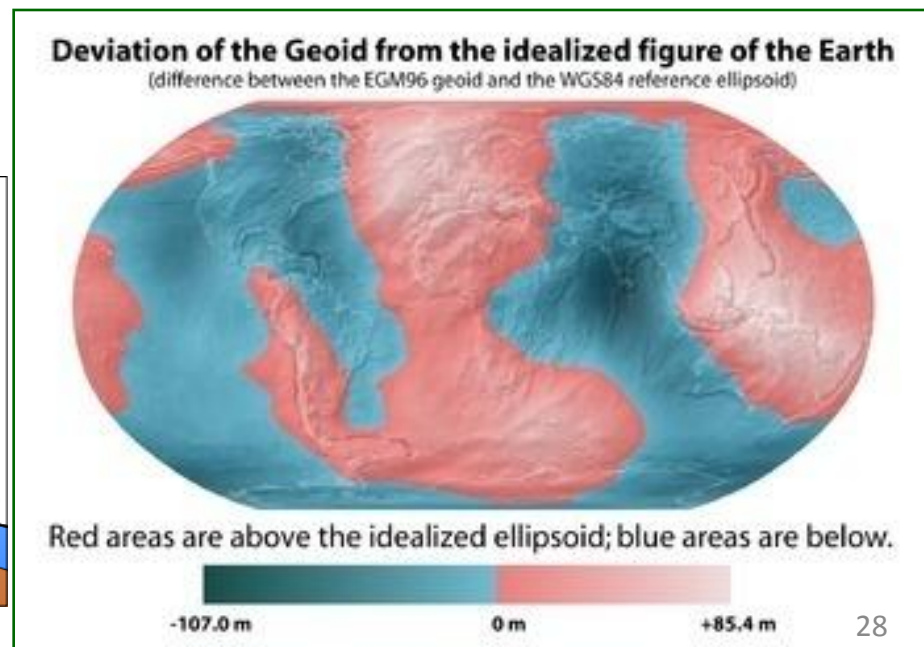
Ide o izostatickú kompenzáciu zemskej kôry. Kôra je na kontinentoch hrubšia než na oceánoch, je hlbšie zanorená do plášťa, ktorý má väčšiu hustotu, takže dochádza ku kompenzácii gravitačných účinkov kôry.

- 1 - hladina oceánu
- 2 – zemský elipsoid
- 3 - lokálna vertikála
„olovnica“ (plumb line)
- 4 - kontinent
- 5 – geoid ▼



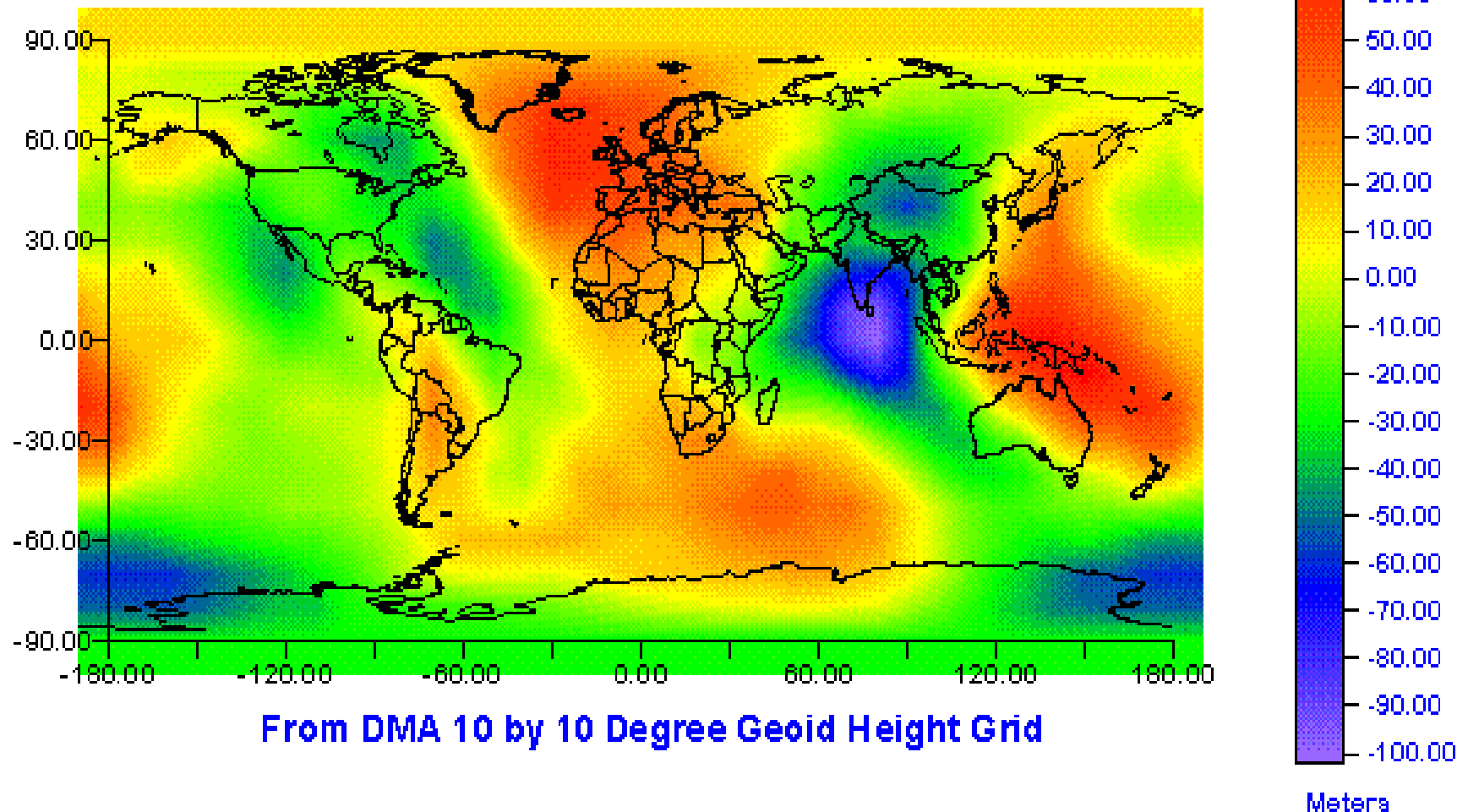
Obrázok dole ukazuje

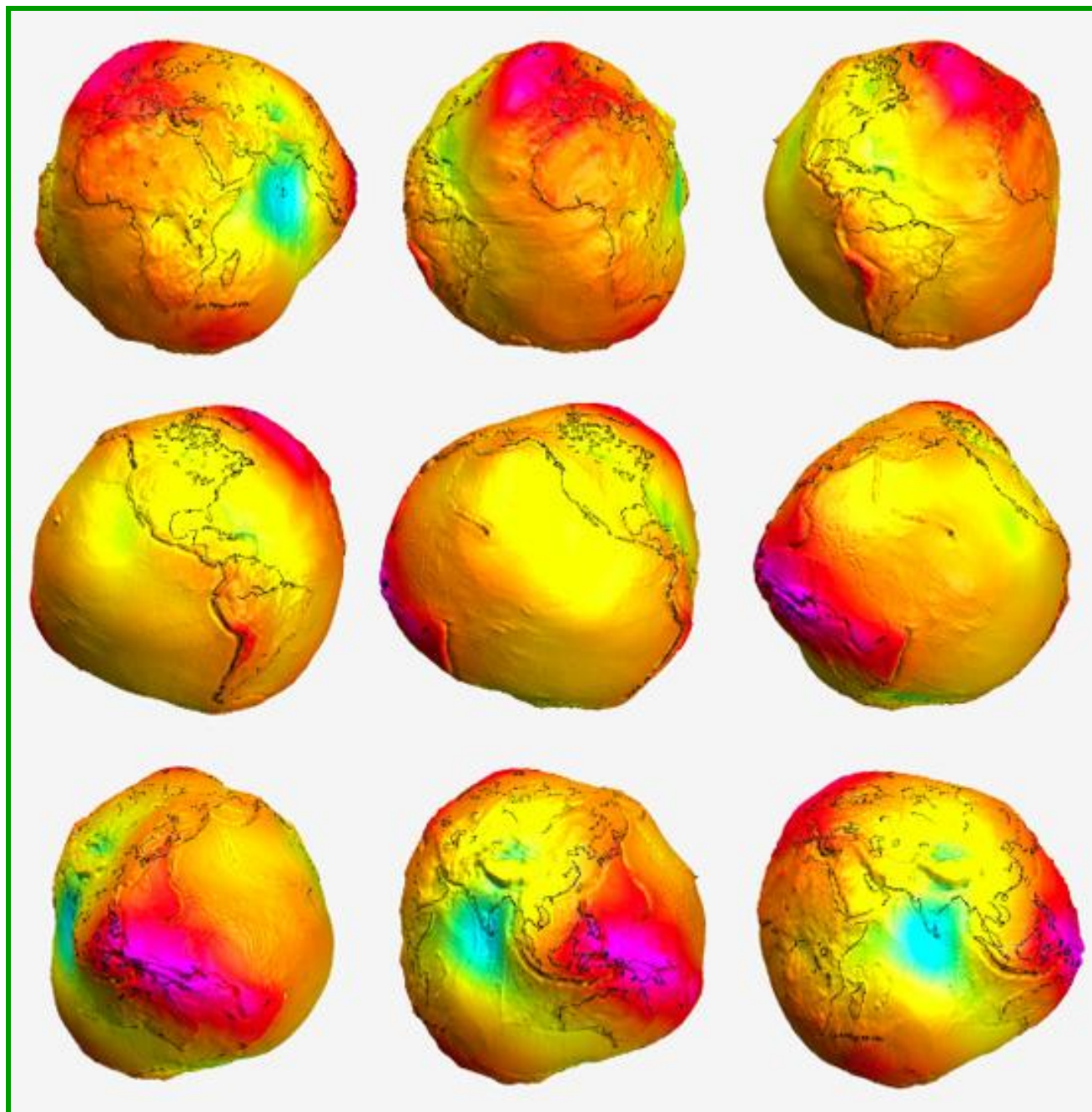
prevýšenia (červené) a „zníženia“ (modré)
geoidu nad referenčným elipsoidom WGS84:



Prevýšenia (červené) a „zníženia“ (modré) geoidu
nad referenčným elipsoidom WGS84:

WGS-84 Geoid Height





◀ výšky geoidu

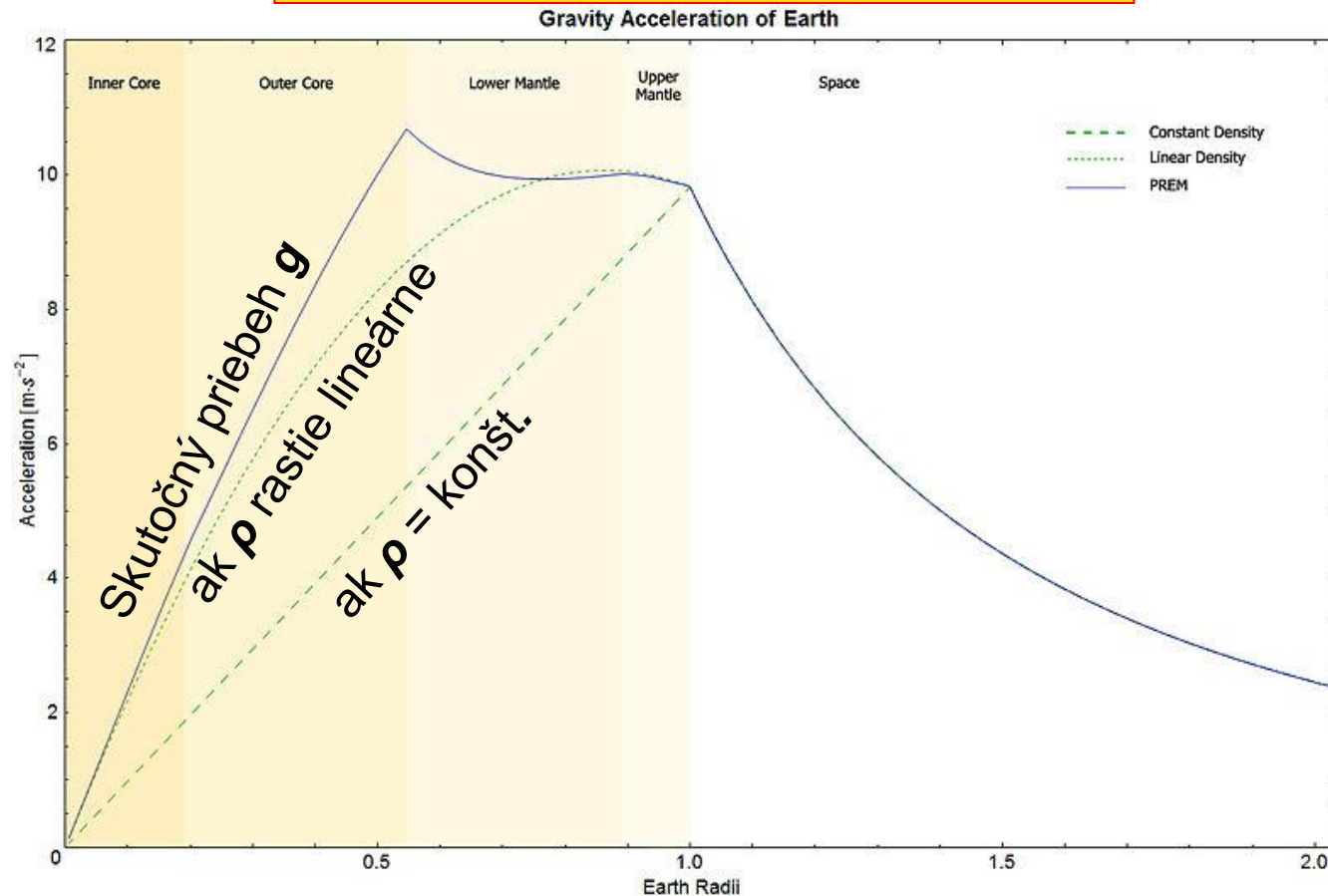
(mierka výrazne
väčšená – preto
„zemiakový“ tvar)
odvožené
z gravitačných
anomálií zistených
meraniami z družíc.

Farby:

Červená –
pozitívne anomálie
modrá –
negatívne anomálie
oranžová –
stredné hodnoty.

Jednotlivé obrázky
predstavujú pohľady
smerom na zemský
rovník, vždy **po 45°**
zemepisnej dĺžky.
(odhora doprava)

3d. Tiažové zrýchlenie v Zemi



PREM = Preliminary Reference Earth Model

Earth's gravity (tiaž Zeme) according to the (PREM). Two models for a spherically symmetric Earth are included for comparison.

(- - -) is for a **constant density** equal to the Earth's average density.

(····) is for a **density that decreases linearly** from center to surface. The density at the centre is the same as in the PREM, but the surface density is chosen so that the mass of the sphere equals the mass of the real Earth.

Pár čísel

Rotačný elipsoid, ktorý sa najviac podobá Zemi má rozmery:

$a = 6378,137 \text{ km}$

$c = 6356.777 \text{ km}$ (cca o **21 km** menej)

rovník je **presná kružnica**.

Odchýľka rovníka od kružnice na **skutočnej Zemi** je nenulová, je ale veľmi malá, cca **20 m**, priblížením by bol trojosý elipsoid, v uvedenom rade s touto odchýľkou súvisí člen ($C_{22} \cos 2\lambda$).

Dá sa ukázať, že $C_{22} = (B-A)/4Ma^2$,

kde **B** a **A** sú momenty zotrvačnosti v rovine rovníka.

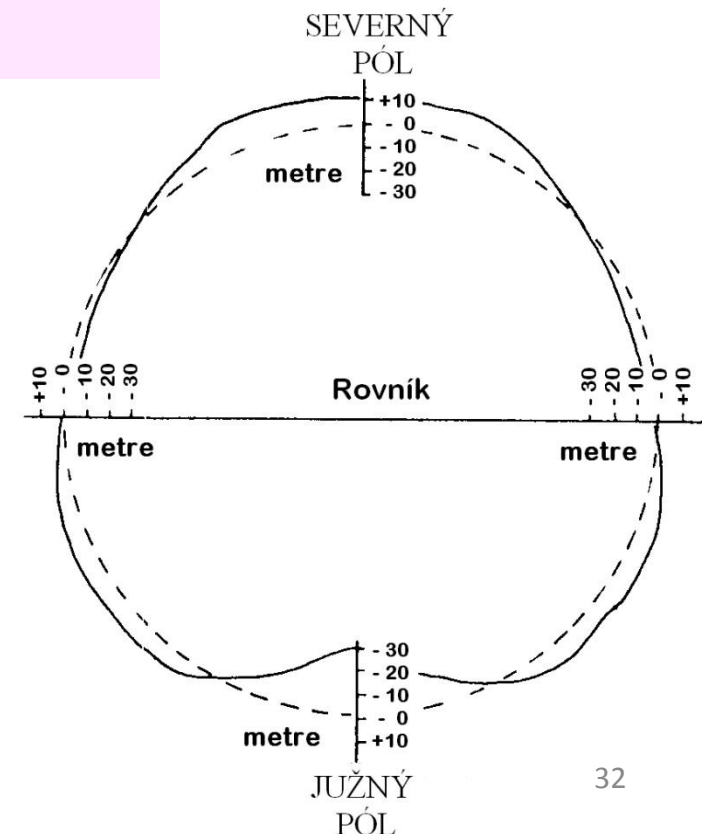
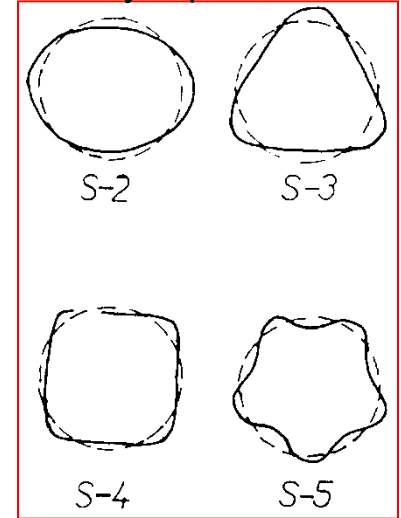
Geoid sa „vlní“ okolo elipsoidu o **100 metrov**

Geoid je na južnom póle asi **40 m** bližšie k stredu Zeme ako na severnom póle, vid' obrázok.

Poludníkový **rez geoidom** spriemernnený podľa zemepisnej dĺžky. Čiarkovane je rotačný elipsoid. Asymetria vzhľadom na rovníkovú rovinu je spôsobená predovšetkým členom $J_3 P_3(\cos \theta)$, ktorý má „hruškovitý“ tvar.

Poznámka. Priemer vzdialeností geoidu od elipsoidu pozdĺž rovníka je podľa obr. nulový, hoci v jednotlivých bodoch môžu byť vzdialenosti geoidu od elipsoidu aj +100 m alebo -100 m.

Sféroidy stupňa 2, 3, 4 a 5



ZHRNUTIE

Tiažové zrýchlenie = gravitačné zrýchlenie + odstredivé zrýchlenie

$$g_{tiaž.} = g_0 + g_{odstr.}$$

Tiažový potenciál = gravitačný potenciál + potenciál odstredivého zrýchlenia

$$W = V + V_{odstr.}$$

Ekvipotenciálnu plochu tiažového potenciálu W , realizovanú pokojnou hladinou oceánov nazývame **geoid**, resp. geoid je teleso uzavreté touto plochou.

Na kontinentoch sa dá poloha geoidu (t.j. výšky geoidu nad elipsoidom) teoreticky (zložite, s dosť veľkou presnosťou) vypočítať z gravitačných anomálií Δg .

Plocha geoidu je v dôsledku nepravidelného rozmiestnenia hmôt tiež nepravidelná.

V hlavných rysoch (v 1. priblížení) sa podobá rotačnému elipsoidu s jedným parametrom J_2 .

V lepšom priblížení sa geoid podobá **elipsoidu** s viacerými parametrami (**poskladaný zo sféroidov vyšších stupňov**).

REFEREČNÉ ELIPSOIDY

$$\text{Tiažový potenciál } W = \text{gravitačný potenciál } V + \text{potenciál odstredivého zrýchlenia } V_{odstr.}$$

$$V \rightarrow V_{gule} + V_{J2} + V_{J4} + T \rightarrow \text{Zvyšok (poruchy)}$$

Pretože je plocha geoidu taká nepravidelná, ale súčasne sa tak málo odlišuje od rotačného elipsoidu, ktorý sa ľahšie matematicky popisuje, tvar Zeme sa pripodobňuje takému jednoduchšiemu tvaru.

Za „normálny“ (=referenčný) tvar Zeme vyberá plocha, ktorá odpovedá zvolenému „normálnemu“ potenciálu.

Výber normálneho potenciálu:

Napríklad:

$$U = V_{gule} + V_{J2} + V_{odstr.} = W_0$$

Alebo

$$U^* = V_{gule} + V_{J2} + V_{J4} + V_{odstr.} = W_0$$

Alebo

$$U^{**} = V_{gule} + V_{J2} + V_{J4} + V_{J6} + V_{J8} + V_{odstr.} = W_0 \quad (\text{napr. refer. elipsoidy GRS80 a WGS84})$$

(W_0 vyberieme rovnaké ako na geoide, potom normálny tvar bude ku geoidu najbližšie).

V_{J2} je oprava potenciálu o 10^{-3} hodnoty
Tvarom je sféroid 2. rádu, t.j. rotačný elipsoid

V_{J4} je oprava potenciálu o 10^{-6} hodnoty
Tvarom je sféroid 4. rádu

Má význam uvažovať J_4 , J_6 , atď? ÁNO. Merania tiaže sú s presnosťou na 10^{-9} hodnoty!

3e) Určovanie parametrov gravitačného potenciálu

1) čiste teoreticky

Vráťme sa k obecnému rozvoju gravitačného potenciálu v sférických súradniciach:

$$V = -\frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n J_n P_n(\cos \theta) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \right]$$

potom $\mathbf{J}_n$, $\mathbf{C}_{nm}$, $\mathbf{S}_{nm}$ predstavujú **Stokesove koeficienty**, ktoré získame integrovaním podľa objemového elementu dV cez celý objem telesa (Zeme). Sú to vlastne **obecné momenty** funkcie rozloženia hustoty ρ vo vnútri Zeme. a je rovníkový polomer Zeme.

$$J_n = -\frac{1}{M} \int_V \left(\frac{r'}{a} \right)^n P_n(\cos \theta') \rho \cdot dV$$

$$C_{nm} = \frac{1}{M} \frac{2(n-m)!}{(n+m)!} \int_V \left(\frac{r'}{a} \right)^n P_{nm}(\cos \theta') \cos m\lambda' \cdot \rho \cdot dV \quad 1 \leq m \leq n$$

$$S_{nm} = \frac{1}{M} \frac{2(n-m)!}{(n+m)!} \int_V \left(\frac{r'}{a} \right)^n P_{nm}(\cos \theta') \sin m\lambda' \cdot \rho \cdot dV$$

Potrebovali by sme rozloženie hustoty v Zemi a V – tvar Zeme, preto je to v praxi **nemožné!**

Koeficient $\mathbf{J}_2$ vyjadruje **polárne sploštenie Zeme**, koef. $\mathbf{C}_{22}$ **nekruhovosť rovníka**.

3e) Určovanie parametrov gravitačného potenciálu

2) Z meraní tiaže na povrchu Zeme a z geodetických meraní

Napr. zo zmeraného sploštenia α a z meraní tiaže môžeme vypočítať

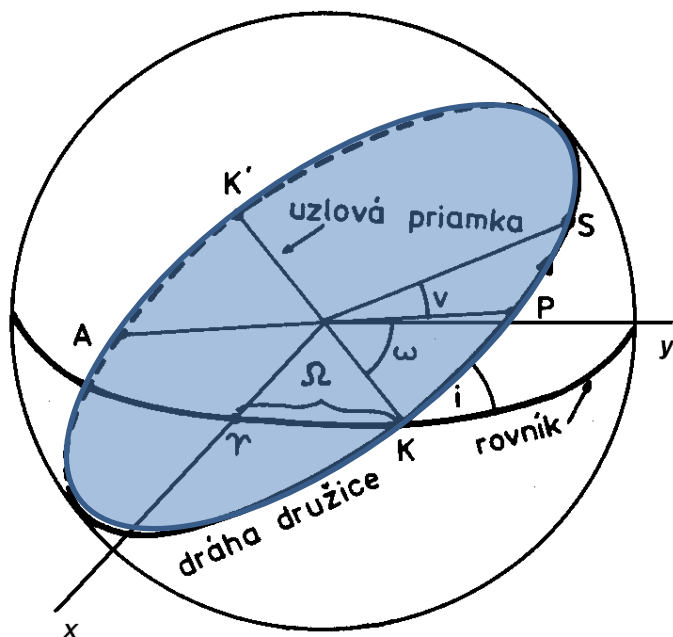
$$J_2 = \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{3}q \quad -\frac{1}{3}\alpha^2 + \frac{2}{21}\alpha.q + \frac{1}{2}q^2$$

$$\alpha = \frac{a-c}{a}$$

$$J_4 = -\frac{4}{5}\alpha^2 + \frac{4}{7}\alpha.q$$

$$q = \frac{\omega^2 a}{GM} = \frac{\text{odstred. zrýchl. na rov.}}{\text{grav. zrýchl. na rov.}}$$

S rozumnou chybou sa takto **dá určiť len koeficient J_2** . Gravitačné účinky nehomogenít v zemskej kôre sú porovnateľné s príspevkom členov radu s $n > 2$ do tiažového zrýchlenia.



3) Z pohybu umelých družíc – **JEDINÝ SPOSOB**

a - veľká polos eliptickej dráhy

e - numerická excentricita dráhy ($0 \leq e < 1$)

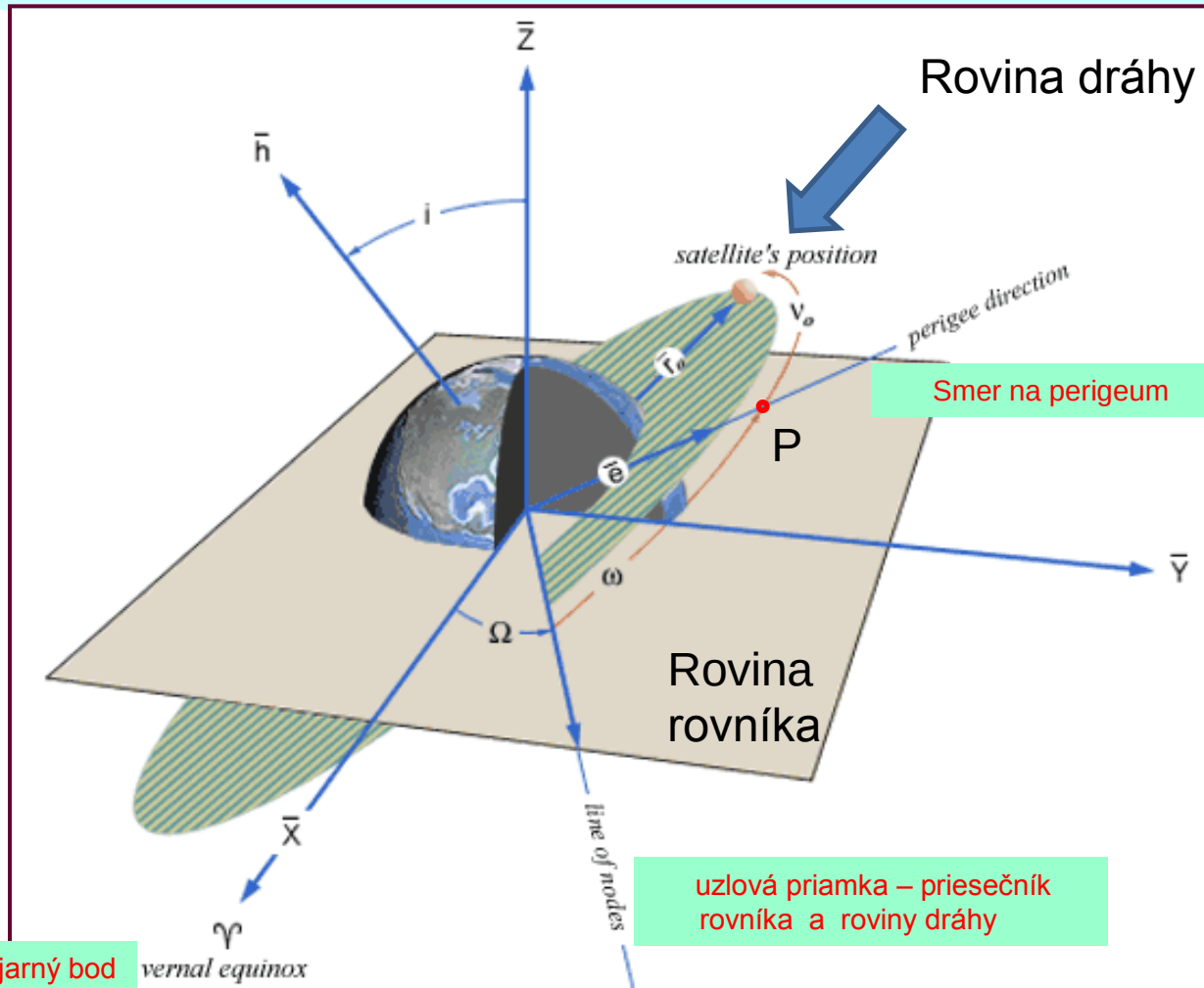
i - sklon roviny obežnej dráhy k rovníku

Ω - dĺžka (rektascenzia) výstupného uzla (uhol k smeru na jarný bod, meraný v rovine rovníka)

ω - argument perigea P (uhol medzi smerom na perigeum a na výstupný uzol (v rovine dráhy))

v - okamžitá poloha satelitu S v definovanom okamihu ($t = t_0$)

6 základných dráhových elementov satelitu obiehajúceho Zem



Smer na jarný bod vernal equinox

- a - veľká polos eliptickej dráhy
- e - numerická excentricita dráhy ($0 \leq e < 1$)
- i - sklon roviny obežnej dráhy k rovníku
- Ω - dĺžka (rektascenzia) výstupného uzla (uhol k smeru na jarný bod, meraný v rovine rovníka)
- ω - argument perigea (uhol medzi smerom na perigeum a výstupný uzol (v rovine dráhy))
- ν - okamžitá poloha satelitu v definovanom okamihu ($t = t_0$), meraná od perigea

Jarný bod, označ. Υ , je bod na oblohe, ktorý je jeden z dvoch priesečníkov svetového (zemského) rovníka a ekliptiky. Slnko sa v ňom nachádza v čase jarnej rovnodennosti. Jedná sa o jeden z najdôležitejších bodov na oblohe, pretože sú naň naviazané ekvatoriálne aj ekliptikálne súradnice. V súčasnosti sa jarný bod nachádza v súhvezdí Rýb, v jeho juhovýchodnej časti. V dôsledku precesie sa však pohybuje rýchlosťou 50,26 oblúkových sekúnd za rok.

a, e tvar dráhy

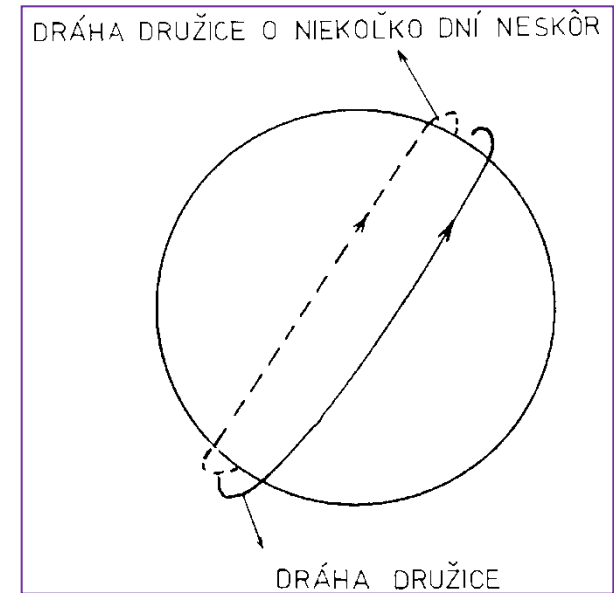
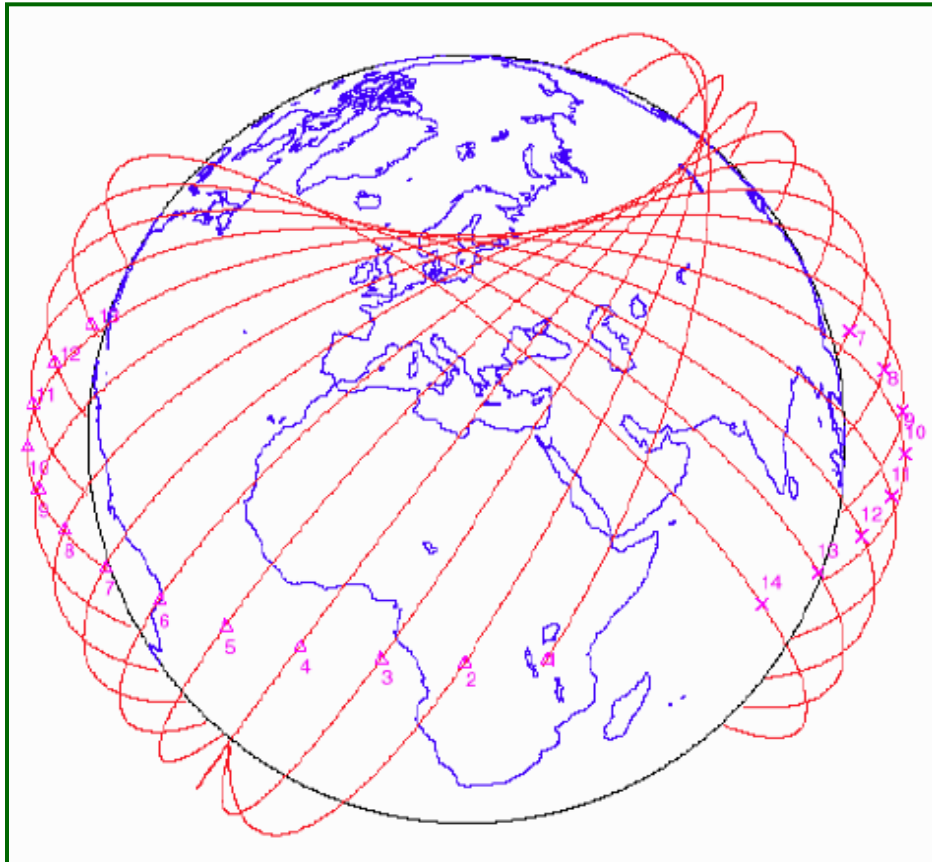
i, Ω, ω poloha dráhy

ν - poloha na dráhe

Keby Zem mala sféricky symetrický gravitačný potenciál $V=GM/r$, dráha družice by sa nemenila.

Ak by sa pohybovala dosť vysoko, ani odpor riedkeho vzduchu by ju nebrzdil ($F=\frac{1}{2}\rho v^2 SC$ - aerodynamická odporová sila, C – odporový koeficient).

V skutočnosti sa rovina dráhy družice stáča smerom ► na západ o niekoľko stupňov za deň.



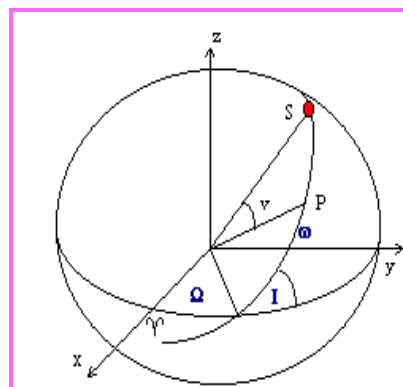
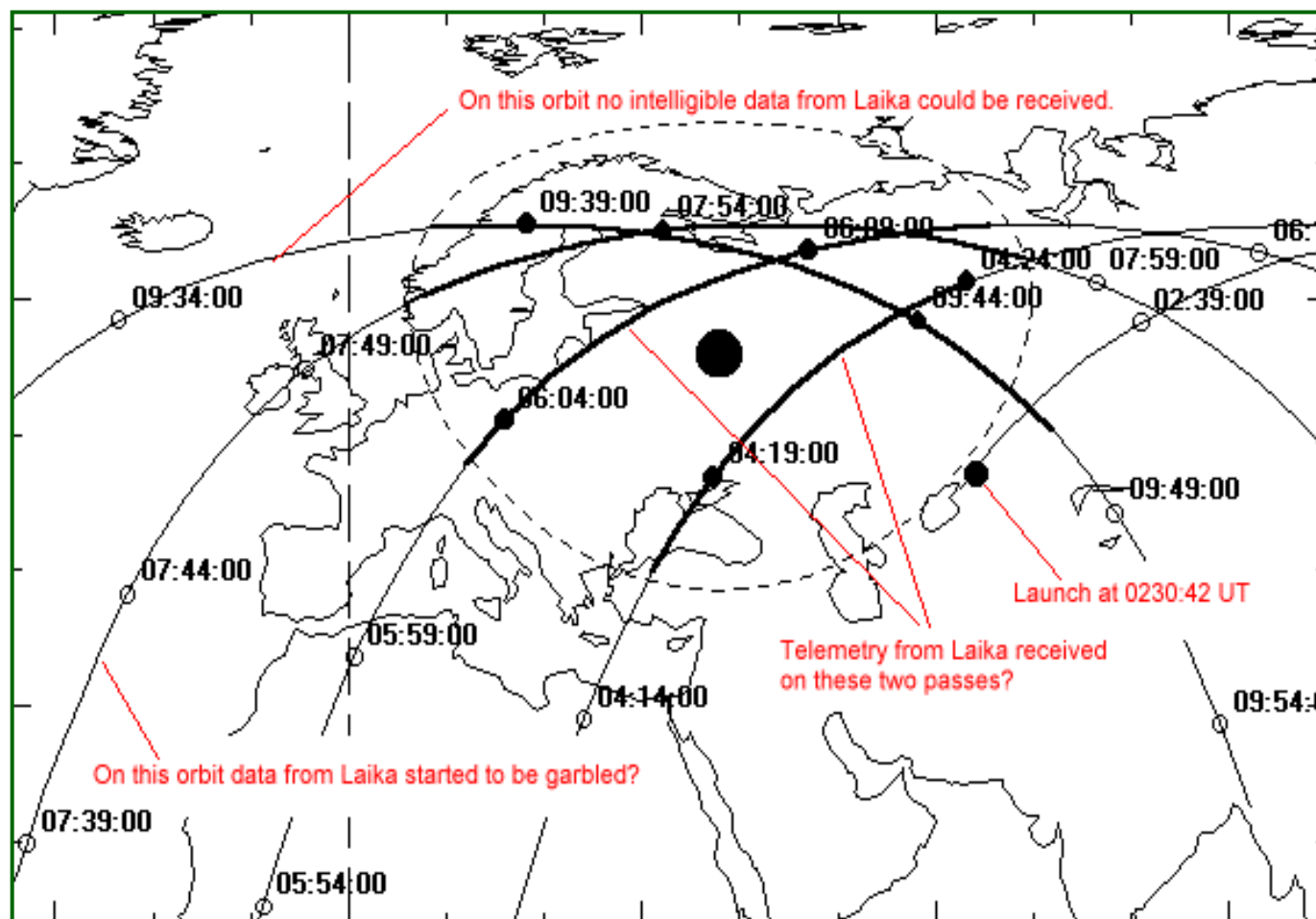
◄ **Postupné stáčanie uzlovej priamky** dráhy satelitu, vyvolaného sploštením Zeme.

Zaujímavý článok
V. Štefl: „Historie výkladu pohybu Měsíce od Clairauta k Hillovi“,
Československý časopis pro fyziku,
č. 3/2009, str. 158 – 164.

Československý geodet a astronóm **Prof. Dr. Emil Buchar** (1901 – 1979) bol prvý, kto na základe pozorovaní stáčania uzlovej priamky niekoľkých prvých ruských umelých družíc (1957 – 1959) tento jav *správne objasnil* a *kvantitatívne vysvetlil*.



Schéma prvých preletov Sputnika 2 (3.11.1957 – 14.4.1958) nad Európou. Z pozorovaní tejto družice určil prof. Buchar **parameter J_2** a **dynamické sploštenie Zeme H**



(Na palube bol pes menom Laika)

Sploštenie Zeme :

a) *statické (geometrické):*

rozdiel rovníkového (a) a polárneho (c) polomeru rotačného elipsoidu, ktorý aproximuje tvar Zeme,

$$f = (a - c) / a = 1 / 298, 257$$

b) *dynamické:*

určuje sa z rozdielu **rovníkového** (A) a **polárneho** (C) momentu zotrvačnosti zemského telesa:

$$H = (C - A) / C = 1 / 308, 61$$

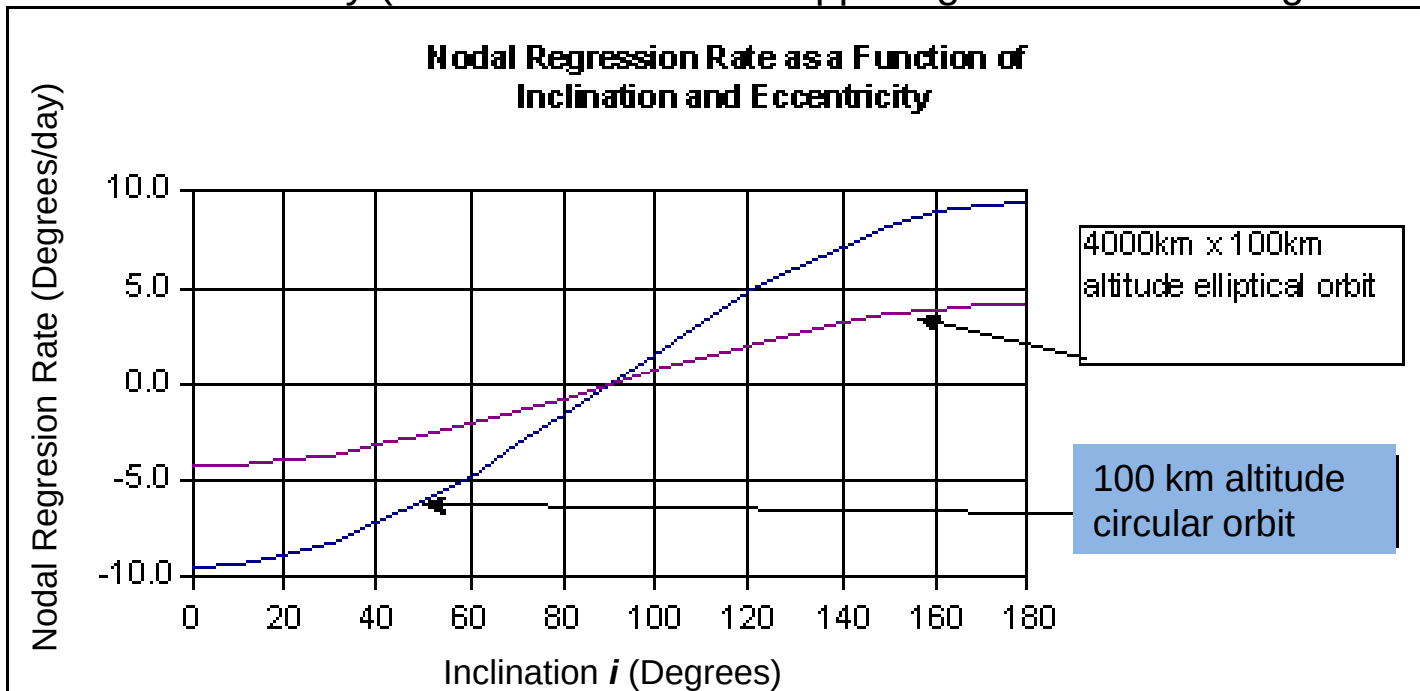
Dá sa určiť z **precesnej konštanty** a z **porúch dráh satelitov** (z J_2 !).

Rozdiel hodnôt statického a dynamického sploštenia je spôsobený nerovnomerným rozložením hustoty v telese Zeme (rast hustoty k stredu Zeme).

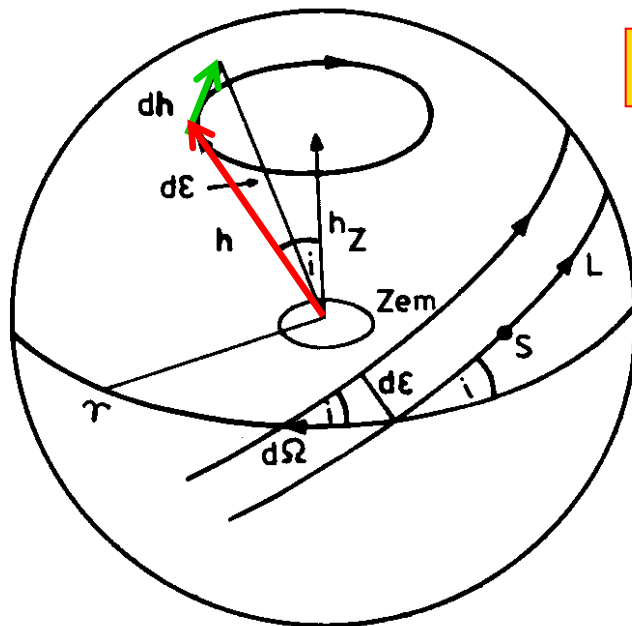
The gravitational effect of the equatorial bulge slightly perturbs the satellite because the force no longer originates from the center of the Earth. This causes the plane of the orbit to precess (like the spinning top), resulting in a movement of the ascending node, Ω .

This motion is **westward** for posigrade orbits ($i < 90^\circ$) and **eastward** for **retrograde orbits** ($i > 90^\circ$).

The figure below shows this *nodal regression rate*, $d\Omega/dt$, as a function of **inclination** and orbital **altitude**. Let's look more closely at this figure. It shows that the higher the satellite is, the less effect the bulge has on the orbit. This makes sense because gravity decreases with the inverse square of the distance. It also says that if the satellite is in a polar orbit (center of the graph), the bulge has no effect. The greatest effect occurs at low altitudes with low inclinations. This makes sense, too, because the satellite travels much closer to the bulge during its orbit, and thus is pulled more by the bulge. For low-altitude and low-inclination orbits, the ascending node can move as much as 9 °/day (lower left corner and upper right corner of the figure here).



The nodal Regression Rate, $\dot{\Omega}$, caused by the Earth's equatorial bulge. Positive numbers represent eastward movement; negative numbers represent westward movement. The less inclined an orbit is to the equator, the greater the effect of the bulge. The higher the orbit, the smaller the effect.



Regresia dráhy družice.

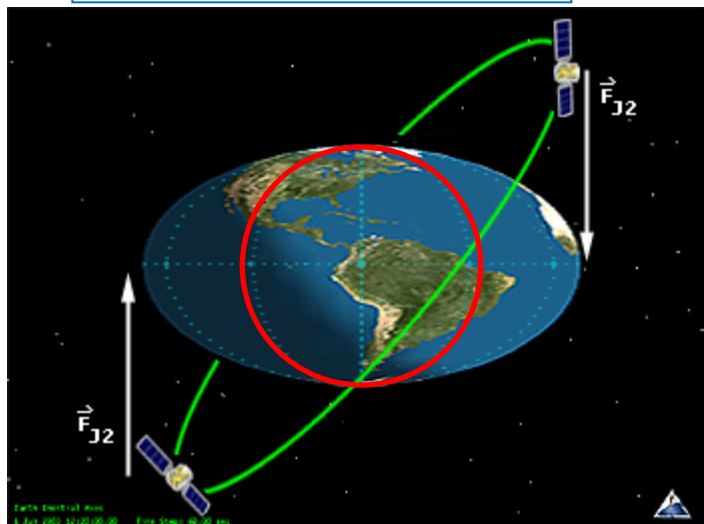
Rýchlosť stáčania – $d\Omega/dt$

Pretože družica **S** **rotuje** okolo Zeme, príťažlivé sily od výdutí $\mathbf{F}_{J2}$ pôsobia momentom síl (točivým momentom) $\mathbf{T}$ a spôsobujú zmenu smeru momentu hybnosti družice na dráhe, čo je precesia dráhy družice. Tá sa prejavuje ako posun uzlovej priamky, t.j. ako zmeny uhla Ω .

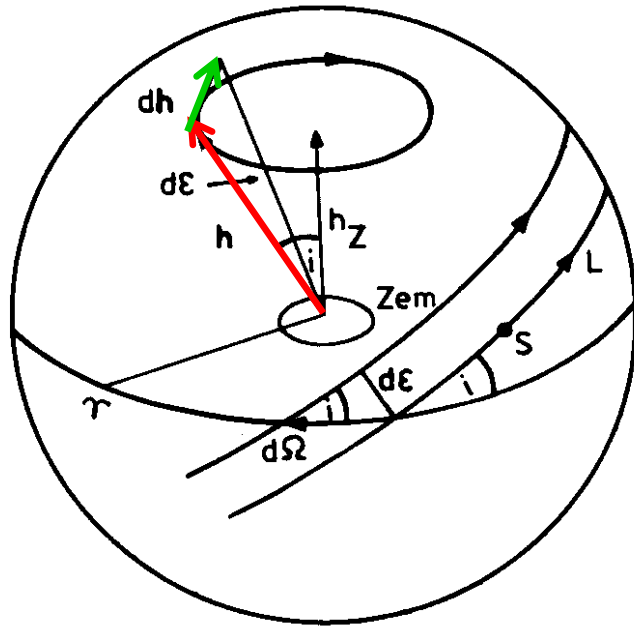
(Zmena momentu hybnosti) $\frac{d\vec{h}}{dt} = \vec{T}$ (moment síl)

Kde $\vec{h} = \vec{r} \times m\vec{v}$ je moment hybnosti družice (smeruje kolmo na rovinu dráhy – **červená šípka**),

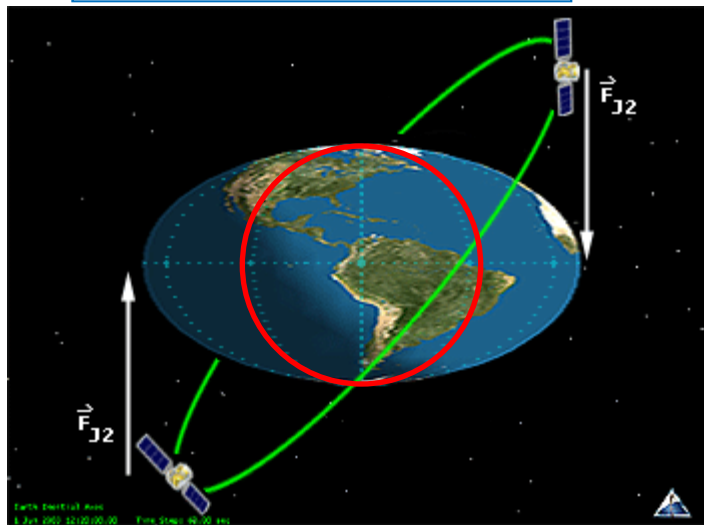
Moment síl je $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}_{J2}$. Výslednica tohto vektorového súčinu smeruje kolmo na vektor $\vec{h}$ a spôsobuje jeho zmenu $d\vec{h}$, (**zelená šípka**).



Rovníkové výdute (značne zväčšené) pôsobia na družicu, „ťahajú“ jej dráhu. **Keby** družica **neobiehala** okolo Zeme, sily $\mathbf{F}_{J2}$ by menili (sklon) inklináciu dráhy i .



Regresia dráhy družice.



Odvozenie rýchlosti stáčania – $d\Omega/dt$

Dá sa odvodiť z $\frac{d\vec{h}}{dt} = \vec{T}$

Kde $\vec{h} = \vec{r} \times m\vec{v} = mr^2 n \vec{h}_0$ je moment hybnosti družice

n je uhlová rýchlosť družice,
 r je polomer kruhovej dráhy.

Výdute pôsobia točivým momentom $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}_{J2} = m \cdot \vec{r} \times \text{grad}_{\perp} V$

$$T = mr \frac{\partial V}{r \partial \varphi} = -m \frac{3GM}{2r} \left(\frac{a}{r} \right)^2 J_2 \sin 2\varphi \quad (0 \leq \varphi \leq i)$$

Účinok točivého momentu je rovnaký pre kladné i záporné šírky φ
Zmena momentu hybnosti družice podľa horného obrázka je $dh = h d\varepsilon = h d\Omega \sin i$

Priemer zo $\sin 2\varphi$ za jeden obch je $(\sin 2i) / 2$,
a využitím Keplerovho zákona $r^3 n^2 = GM$
pre eliptickú dráhu družice:

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{n}{(1-e^2)} \left(\frac{a}{a_s} \right)^2 J_2 \cos i$$

a – rovníkový
polomer Zeme

a_s – veľká poloos

e – excentricita
dráhy družice

n – je uhlová rýchlosť
obiehania družice

i – inklinácia

Rovina dráhy družice pomaly rotuje okolo rotačnej osi.

Tento pohyb prevláda, lebo vydutina na rovníku Zeme spôsobuje najväčšiu odchýlku od symetrickej príťažlivosti Zeme.

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{n}{(1-e^2)^2} \left(\frac{a}{a_s} \right)^2 \cos i \cdot J_2 = k_2 J_2$$

Koeficient k_2 závisí od elementov dráhy družice. Keď zmeriame, ako rýchlo sa pohybuje uzol Ω , t.j. $d\Omega/dt$, môžeme vypočítať parameter J_2 , charakterizujúci polárne sploštenie.

Avšak nielen J_2 , ale všetky **párne** zonálne harmonické členy (t.j. J_{2n}) prispievajú k **rovnomernému** pohybu uzla (Ω).

Rovnomerný pohyb uzla je teda súčet príspevkov všetkých párných zonálnych členov

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{n}{(1-e^2)^2} \left(\frac{a}{a_s} \right)^2 \cos i \cdot J_2 + k_4 J_4 + \dots k_{2n} J_{2n} + \dots$$

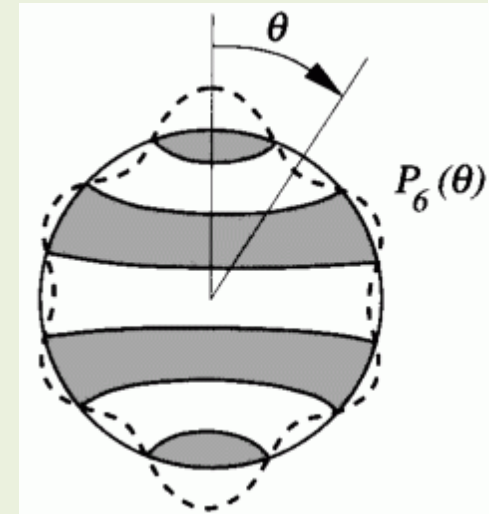
kde koeficienty k_{2n} závisia podobne od elementov dráhy.

Keď sa zostaví sústava n takýchto rovníc pre n rôznych dráh viacerých družíc, tak jej riešením dostaneme n parametrov J_{2n} .

J_{2n} dokonca spôsobujú aj **rovnomernú** zmenu dĺžky perigea ω .

Nepárne zonálne (asymetrické voči rovine rovníka) členy J_{2n+1} neprodukujú rovnomernú zmenu žiadneho elementu dráhy. Spôsobujú **oscilácie** Ω, ω, i, e .

Harmonické členy, závislé od dĺžky λ , spôsobujú tiež **oscilujúce** poruchy dráhy družice.



Geodetic Reference System 1980 (GRS 80) and World Geodetic System 1984 (WGS 84)

V r. 1924 zaviedla IUGG* prvý Medzinárodný elipsoid. V ňom bola rovníková poloos o 251 m dlhšia než v dnes používaných elipsoidoch GRS 80 alebo WGS 84 , ktoré sú v súčasnosti najlepšimi svetovými geodetickými referenčnými systémami, boli pri nich využité merania zmien dráh družíc.

Príklady rôznych referenčných elipsoidov a ich geometrické parametre.

Ellipsoid name	Semimajor axis (a in meters)	Reciprocal of flattening ($1/f$)
Airy 1830	6 377 563.396	299.324 964 6
Helmert 1906	6 378 200	298.3
International 1924	6 378 388	297
Australian National	6 378 160	298.25
GRS 1967	6 378 160	298.247 167 427
GRS 1980	6 378 137	298.257 222 101
WGS 1984	6 378 137	298.257 223 563

} Rozdiel je na 9.
mieste

GRS 80 je dohodnutý referenčný systém pre Zem, ktorý dohodla IUGG v r. 1980.

Súradnicový systém **WGS 84** bol navrhnutý ako referenčný systém pre GPS.

Komisia, ktorá vyberala elipsoid WGS 84 a ďalšie parametre, sa snažila čo najviac zachovať parametre GRS 80, t.j. referenčného elipsoidu.

* IUGG = International Union of Geodesy and Geophysics

Referenčný Elipsoid GRS 80 má 4 základné parametre:

($a = 6\,378\,137\text{ m}$) – hlavná poloos

($GM = 3\,986\,005 \times 10^8\text{ m}^3/\text{s}^2$) – tzv. geocentrická gravitačná konštanta Zeme, ktorá zahŕňa aj hmotnosť atmosféry

($J_2 = 108\,263 \times 10^{-8}$) – dynamické sploštenie (dynamic form factor) Zeme

($\omega = 7\,292\,115 \times 10^{-11}\text{ rad/s}$) uhlová rýchlosť zemskej rotácie (Moritz, 1980).

Použijúc tieto hodnoty, z meraní precesie dráh družíc boli zistené ďalšie J_n a z nich do modelu GRS 80 boli zahrnuté tieto 3 parametre popisujúce tvar.

$$J_4 = -0.000\,002\,370\,912\,22$$

$$J_6 = 0.000\,000\,006\,083\,47$$

$$J_8 = -0.000\,000\,000\,014\,27$$

Potom boli dopočítané tieto fyzikálne hodnoty:

$$U_0 = 6\,263\,686.0850 \times 10\text{ m}^2\text{ s}^{-2}\text{ normálny potenciál na elipsoide}$$

$$Y_e = 9.780\,326\,7715\text{ ms}^{-2}\text{ normálna tiaž na rovníku}$$

$$Y_p = 9.832\,186\,3685\text{ ms}^{-2}\text{ normálna tiaž na póle (normálna preto, že je to na elipsoide a nie na geoid.)}$$

WGS 84

Je veľmi podobný GRS 80. Má rovnaké hodnoty a a ω , ale WGS 84 má spresnenú hodnotu geocentrickej gravitačnej konštanty ($GM = 3\,986\,004.418 \times 10^8\text{ m}^3/\text{s}^2$) a za základný parameter zvolili prevrátenú hodnotu spoštenia (flattening) ($1/f = 298.257\,223\,563$) namiesto J_2 . *Pritom rozdiel v $1/f$ oproti GRS 80 je na 9. mieste.*

Rovnako ako GRS 80, je tvar tohto elipsoidu (a jeho potenciálu) popísaný okrem J_2 , aj J_4 , J_6 a J_8 . Navyše nultý poludník tohto referenčného elipsoidu leží 5.31 oblúkových sekúnd na východ od Greenwichského poludníka, čo predstavuje 102,5 metra na geografickej šírke Greenwichského observatória.

Malé rozdiely medzi elipsoidmi GRS 80 a WGS 84 nemajú prakticky žiadne dôsledky.

International Gravity Formulae = Tiaž na elipsoide

Keď máme dohodnutý tvar, môžeme odvodiť, aká bude na ňom teoretická, čiže normálna tiaž. K danému vzorcu pre GRS dostaneme príslušný Medzinárodný vzorec pre tiaž –

International Gravity Formulae (IGF)

V týchto rovniciach, φ je geografická šírka a g_0 je

teoretická tiaž čiže **normálna tiaž**

- Prvý medzinárodne dohodnutý vzorec bol IGF 1930 (pre Medzinárodný elipsoid GRS 1924)

$$g_0 = 9.780\,49 (1 + 0.005\,2884 \sin^2 \varphi - 0.000\,0059 \sin^2 2\varphi)$$

Mal chybu 13 mgals (0,000 13 m.s⁻²)

- Geodetic Reference System 1967 (GRS 67) dal vzorec 1967 IGF:

$$g_0 = 9.780\,318\,46 (1 + 0.005\,3024 \sin^2 \varphi - 0.000\,0058 \sin^2 2\varphi)$$

- Gravity formulae 1980 pre GRS 80:

$$g_0 = 9.780\,326\,7715 (1 + 0.005\,279\,0414 \sin^2 \varphi + 0.000\,023\,2718 \sin^4 \varphi + 0.000\,000\,1262 \sin^6 \varphi + 0.000\,000\,0007 \sin^8 \varphi)$$

Má relatívnu chybu 10⁻¹⁰.

Priemerné hodnoty normálnej tiaže sú :

$g_{av} = 9.797\,644\,656 \text{ m s}^{-2}$ priemer cez elipsoid,

$g_{45} = 9.806\,199\,203 \text{ m s}^{-2}$ priemer na 45° šírky.

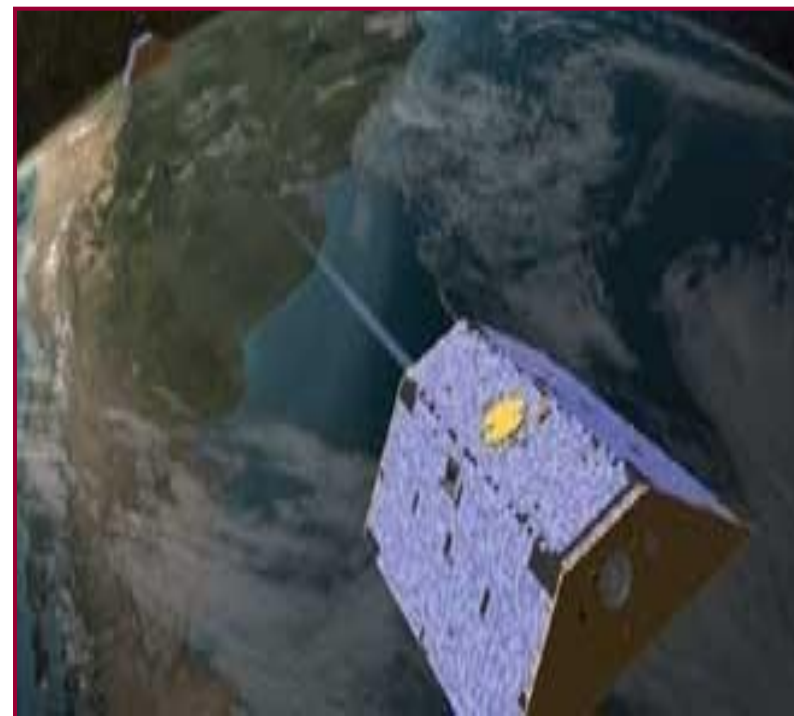
Bežne používaný vzorec 1980 (skrátенý, preto menej presný)

$$g_0 = 9.780\,327 (1 + 0.005\,3024 \sin^2 \varphi - 0.000\,0058 \sin^4 \varphi)$$

má relat. chybu 10⁻⁷.



Doteraz najpresnejšie mapovanie zemského gravitačného poľa vykonávala dvojica satelitov **GRACE** (**G**ravity **R**ecovery **A**nd **C**limate **E**xperiment - spoločný experiment USA a NSR) ,
 ◀ štart 17. 3. 2002. **Dvojica identických satelitov** (dole vľavo pri montáži a dole vpravo - na polárnych dráhach vo výške 485 km, **obiehajú vo vzájomnej vzdialenosti 220 km** a meria sa veľmi presne (na μm) ich **vzájomná poloha** .
 (Dráha oboch satelitov „Tom“ a „Jerry“ sa postupne znižovala v dôsledku odporu atmosféry (ako je to bežné pri všetkých satelitoch) a preto boli v r. 2017 vyradené.



Zhrnutie

- 1) Snažili sme sa nájsť tvar Zeme.
- 2) Zem nie je guľa. Pretože rotuje, je sploštená.
- 3) Pretože nie je homogénna (rôzne miesta majú rôzne hustoty), nie je presným rotačným elipsoidom.
- 4) Tvar Zeme vyplýva z fyzikálnych zákonov. Telesá plastické (dlhodobé pôsobenie) zaujmú taký tvar, aby povrch bol ekvipotenciálna plocha, (hladinová plocha, lebo kvapaliny sa ustália tak, aby ich povrch bol ekvipotenciálna plocha. Inak by sa jednoducho preliali).
- 5) Takže geoid tvorí „pokojná“ hladina oceánov, a pod kontinentami je tam, kde by bola hladina, keby sme vykopali kanál. Ale výška geoidu sa dá vypočítat' z grav. anomálií Δg . Fyzikálne zákony sú také, že $g \perp$ na ekvipotenciálnu plochu, a na tej ploche je všetko „vodorovne“, veď je to hladina, aj keď je tá plocha krivá.
- 6) Tento teoretický tvar voláme geoid.
Ako vyzerá? Je blízky rotačnému elipsoidu. Preto sa definuje ako výšky geoidu nad elipsoidom.
- 7) Problémom je, ako vybrať vhodný elipsoid. Keď vyberieme elipsoid jednoduchý, s jediným parametrom J_2 , budú výšky geoidu nad ním relatívne veľké. Dnešné možnosti meraní a poznanie gravitačného poľa Zeme spôsobuje, že chceme referenčný tvar Zeme vybrať dosť blízko skutočného tvaru tak, aby odchýlky geoidu od neho (a s nimi súvisiace anomálie tiaže) odrážali nehomogenity v rozložení hmôt. Zložitejšie refer. tvary – blízke geoidu s parametrami J_2, J_4, J_6, J_8 , majú výšky geoidu už len ± 100 m. Sú to referenčné elipsoidy WGS 84, GRS 80.
- 8) Poznanie geoidu je dôležité, lebo od neho odčítavame ortometrické (=nadmorské) výšky bodov na povrchu Zeme.
- 9) Aj sploštenie sa dá určiť veľmi presne: **1/298,257 222 101** alebo **1/298.257 223 563**.
- 10) Kým na nerotujúcej homogénnej guli by tiaž bola konštantná, na elipsoide s n parametrami aj tiažové zrýchlenie je popísané n konštantami. Vtedy chyba je až na 10. mieste.
- 11) Angličtina nerozlišuje gravitačné a tiažové zrýchlenie, to treba pochopiť z kontextu, čo je pre angličtinu typické. Niekedy rozlišujú gravitational acceleration a gravity (príťažlivosť ako vlastnosť).

Na záver – merania tiaže a archeológia

Odborníci **Katedry aplikovanej a environmentálnej geofyziky** na Prírodovedeckej fakulte UK sa v priebehu októbra 2011 podieľali na medzinárodnom výskume realizovanom v archeologickej lokalite **Newgrange (Írsko)**. ► Táto lokalita je známa najmä megalitickou mohylou z mladšej doby kamennej (vznik sa odhaduje na 2700 rokov pr.n.l., je staršia ako Stonehenge) a je súčasťou svetového dedičstva UNESCO.



◀ Štruktúra mohyly je výnimočná tým, že vo svojom vnútri obsahuje pohrebnú komoru s chodbou, do ktorej **vnikajú lúče slnka** pri jeho východe počas zimného slnovratu (21. dec.) pozdĺž úzkej chodby až dovnútra asi na 17 minút.



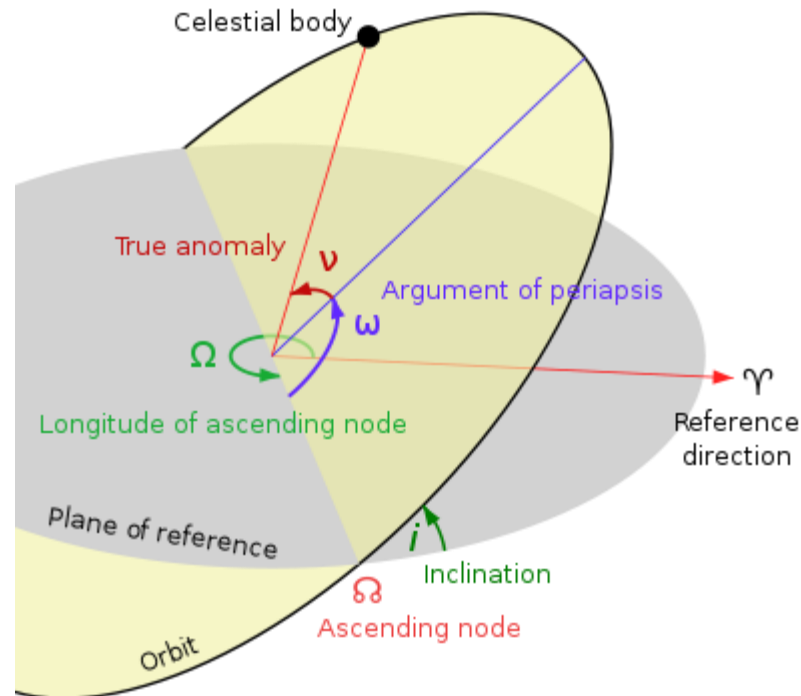
Úlohou bola realizácia vysoko presných meraní zemského tiažového poľa (tzv. **mikro-gravimetrických meraní**) ► za účelom testovania danej metódy pri možnej **detekcii pohrebných komôr a chodieb vo vnútri** telesa typickej neolitickej mohyly.

Pomocou takýchto mikrogravimetrických meraní bolo napríklad nájdených u nás na Slovensku už viacero stredovekých krýpt v interiéroch kostolov.



Základné dráhové elementy satelitu obiehajúceho Zem v angličtine:

- For a geocentric orbit, Earth's equatorial plane as the reference plane, and the First Point of Aries (jarný bod, Aries - ryby) as the origin of longitude. In this case, the longitude is also called the **right ascension of the ascending node**, or **RAAN**. The angle is measured eastwards (or, as seen from the north, counterclockwise) from the First Point of Aries to the node.
- For a heliocentric orbit, the ecliptic as the reference plane, and the First Point of Aries as the origin of longitude. The angle is measured counterclockwise (as seen from north of the ecliptic) from the First Point of Aries to the node.



Iný pohľad na „rodinu“ sférických harmonických – farebná stupnica znázorňuje ich normované hodnoty (od modrej – minimá – po červenú – maximá).

Poznámka: vzadu sú vidieť modely atómových orbitálov – lebo aj pri riešení Schrödingerovej rovnice pre vodíku-podobné atómy sa objavujú sférické harmonické funkcie! ▼

