Prednáška č. 6

Numerické metódy matematiky I

Aproximácie funkcií

OBSAH

Aproximácia a interpolácia

Aproximovať funkciu $f(x)$ znamená

nahradiť ju funkciou $\varphi(x)$,

ktorá je k funkcii $f(x)$ v istom zmysle blízka.

Budeme sa zoberať dvomi základnými typmi aproximácie a to **interpoláciou** a **metódou najmenších štvorcov.**

Definícia: **Interpolácia** je taká aproximácia,

pri ktorej $\varphi(x)$ nadobúda v zadaných bodoch x_i

predpísané hodnoty $y_i = f(x_i)$.

Niekedy navyše žiadame,

aby funkcie f a φ mali v bodoch x_i

tiež rovnaké derivácie.

Aproximovať funkciu $f(x)$ znamená

nahradiť ju funkciou $\varphi(x)$,

ktorá je k funkcii $f(x)$ v istom zmysle blízka.

Budeme sa zoberať dvomi základnými typmi aproximácie
a to **interpoláciou** a **metódou najmenších štvorcov.**

Definícia: **Metóda najmenších štvorcov** je taká aproximácia,

pri ktorej $\varphi(x)$ „prekladáme"

medzi zadanými bodmi $[x_i, y_i]$ tak,

aby „vzdialenosť" funkcií f a φ bola

v istom zmysle minimálna.

Je pri tom charakteristické,

že funkcia $\varphi(x)$ bodmi $[x_i, y_i]$ neprechádza.

Aproximácia a interpolácia

Aproximáciu $\varphi(x)$ použijeme
na približný výpočet hodnôt funkcie $f(x)$
napríklad pri vykresľovaní grafu $\varphi(x) \approx f(x)$.

Vo všeobecnosti sa $\varphi(x)$ používa na riešenie úloh,
v ktorých vystupuje funkcia f,
ktorú je účelné alebo dokonca nevyhnutné
nahradiť jej aproximáciou φ.

Príkladom môže byť výpočet derivácie
alebo určitého integrálu.

Je vhodné, aby bol výpočet $\varphi(x)$ „jednoduchý“.
Preto sa $\varphi(x)$ často hľadá v tvare polynómu.

Interpolácia

Interpolačnú funkciu $\varphi(x)$
vyberáme z vhodnej triedy funkcií.

Interpolácia

Interpolačnú funkciu $\varphi(x)$
vyberáme z vhodnej triedy funkcií.
Obmedzíme sa na dva najbežnejšie prípady:

1. $\varphi(x)$ je polynóm;

Interpolácia

Interpolačnú funkciu $\varphi(x)$
vyberáme z vhodnej triedy funkcií.
Obmedzíme sa na dva najbežnejšie prípady:

1. $\varphi(x)$ je polynóm;
2. $\varphi(x)$ je po častiach polynóm,
   na každom subintervale všeobecne iný

OBSAH

Interpolácia polynómom

Predpokladajme, že sú dané navzájom rôzne body

$$x_0, x_1, \ldots, x_n, \qquad x_i \neq x_j \quad \text{pre} \quad i \neq j,$$

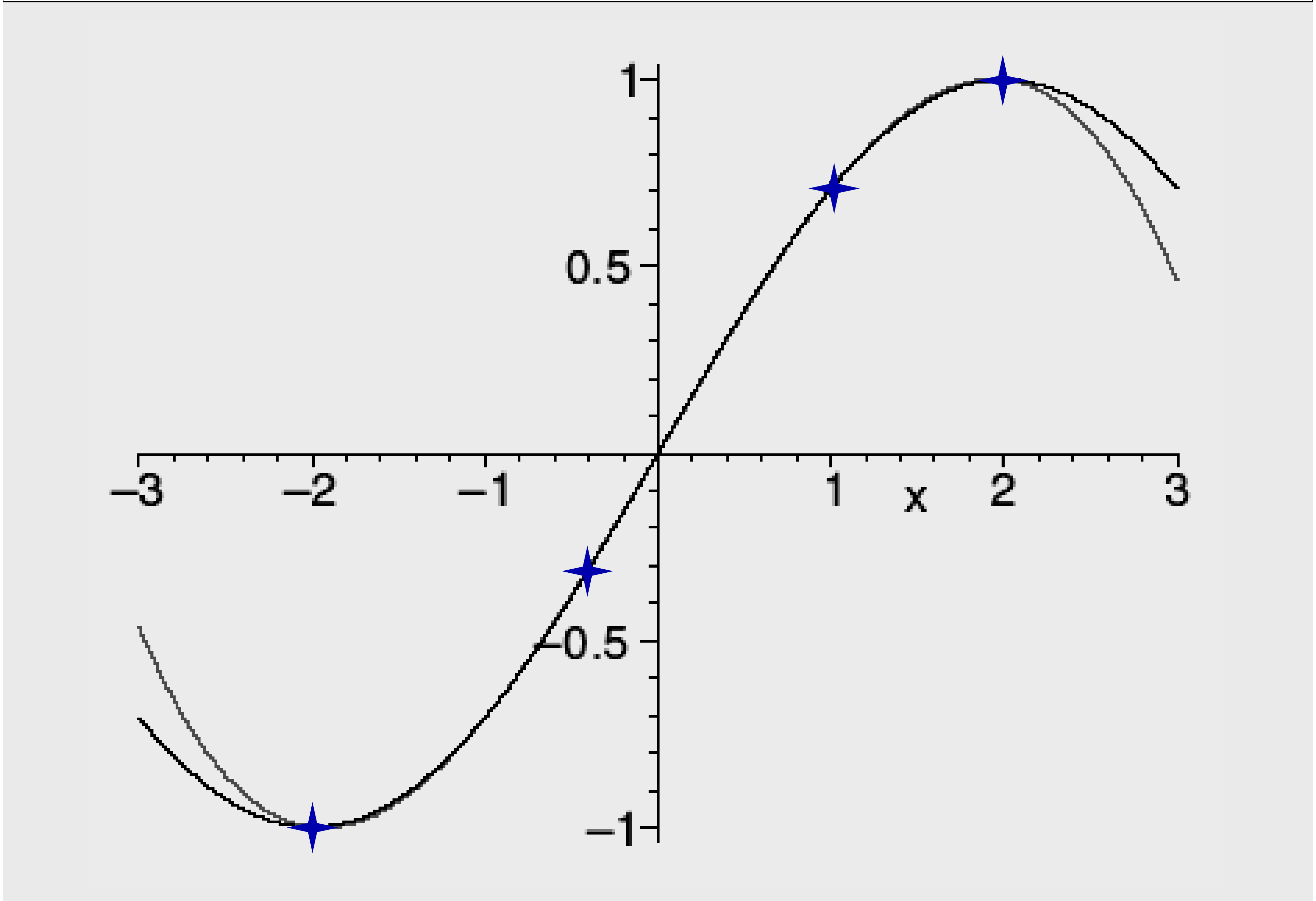
ktorým tiež hovoríme **uzly interpolácie**,

a v každom z nich je predpísaná hodnota y_i.

Hľadáme **interpolačný polynóm** $P_n(x)$ stupňa najviac n,
ktorý spĺňa **interpolačné podmienky**

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Interpolácia polynómom



Veta Nech sú dané body $[\, x_i, y_i \,]$, $i = 0, \ldots n$.

Potom **existuje práve jeden polynóm** P_n stupňa nanajvýš n taký,

že $P_n(x_i) = y_i, \;\; i = 0, \ldots n$.

Existenciu interpolačného polynómu dokážeme tak,
že ukážeme postup,
ktorým je ho možné pre ľubovoľné, navzájom rôzne
uzlové body skonštruovať.

Interpolácia polynómom

To, že interpolační polynóm prechádzajúci danými bodmi existuje práve jeden, dokážeme sporom.

Predpokladajme, že existujú dva polynómy stupňa nanajvýš n, označme ich $P_n(x)$ a $R_n(x)$ také, že $P_n(x_i) = y_i,\ i = 0, \dots n$ aj $R_n(x_i) = y_i,\ i = 0, \dots n$.

Ukážeme, že tieto dva polynómy sú zhodné.

Označme $Q_n(x) = P_n(x) - R_n(x)$.
Je vidieť, že $Q_n(x)$ je znovu polynóm stupňa nanajvýš n a navyše $Q_n(x_i) = 0,\ i = 0, \dots ,n$.
Máme teda polynóm stupňa nanajvýš n, ktorý má $n+1$ koreňov.
To je možné iba tak, že $Q_n(x)$ je identicky rovný nule, $Q_n(x) = 0$ a teda $P_n(x) = R_n(x) \quad \forall x \in \Re$.

OBSAH

Lagrangeov tvar interpolačného polynómu má vyjadrenie

$$P_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x) \;,$$

kde $l_i(x)$ sú tzv. **fundamentálne polynómy** definované predpisom

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1}) \qquad \ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1}) \qquad \ldots(x_i - x_n)} \;.$$

Ľahko zistíme, že

$$l_i(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{pre } k = i, \\ 0 & \text{pre } k \neq i, \end{cases} \qquad i, k = 0, 1, \ldots, n \;,$$

takže interpolačné podmienky

$$P_n(x_k) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x_k) = y_k, \;\; k = 0, 1, \ldots, n \;,$$

sú splnené.

Príklad: Určíme interpolačný polynóm pre dáta predpísané tabuľkou

x_i	-1	1	2	3
y_i	-6	-2	-3	2

Najskôr získame fundamentálne polynómy

$$\ell_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(-1-1)(-1-2)(-1-3)} = -\frac{1}{24}\left(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right),$$

Príklad: Určíme interpolačný polynóm pre dáta predpísané tabuľkou

x_i	-1	1	2	3
y_i	-6	-2	-3	2

Najskôr získame fundamentálne polynómy

$$\ell_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(-1-1)(-1-2)(-1-3)} = -\frac{1}{24}\,(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)\,,$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{(1+1)(1-2)(1-3)} = \frac{1}{4}\,(x^3 - 4x^2 + x + 6)\,,$$

Príklad: Určíme interpolačný polynóm pre dáta predpísané tabuľkou

x_i	-1	1	2	3
y_i	-6	-2	-3	2

Najskôr získame fundamentálne polynómy

$$\ell_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(-1-1)(-1-2)(-1-3)} = -\frac{1}{24}\left(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right),$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{(1+1)(1-2)(1-3)} = \frac{1}{4}\left(x^3 - 4x^2 + x + 6\right),$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(2+1)(2-1)(2-3)} = -\frac{1}{3}\left(x^3 - 3x^2 - x + 3\right),$$

Príklad: Určíme interpolačný polynóm pre dáta predpísané tabuľkou

x_i	-1	1	2	3
y_i	-6	-2	-3	2

Najskôr získame fundamentálne polynómy

$$\ell_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(-1-1)(-1-2)(-1-3)} = -\frac{1}{24}\,(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)\,,$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{(1+1)(1-2)(1-3)} = \frac{1}{4}\,(x^3 - 4x^2 + x + 6)\,,$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(2+1)(2-1)(2-3)} = -\frac{1}{3}\,(x^3 - 3x^2 - x + 3)\,,$$

$$\ell_3(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(3+1)(3-1)(3-2)} = \frac{1}{8}\,(x^3 - 2x^2 - x + 2)$$

Lagrangeov interpolačný polynómom

x_i	-1	1	2	3
y_i	-6	-2	-3	2

$$\ell_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(-1-1)(-1-2)(-1-3)} = -\frac{1}{24}\,(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)\,,$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{(1+1)(1-2)(1-3)} = \frac{1}{4}\,(x^3 - 4x^2 + x + 6)\,,$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(2+1)(2-1)(2-3)} = -\frac{1}{3}\,(x^3 - 3x^2 - x + 3)\,,$$

$$\ell_3(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(3+1)(3-1)(3-2)} = \frac{1}{8}\,(x^3 - 2x^2 - x + 2)$$

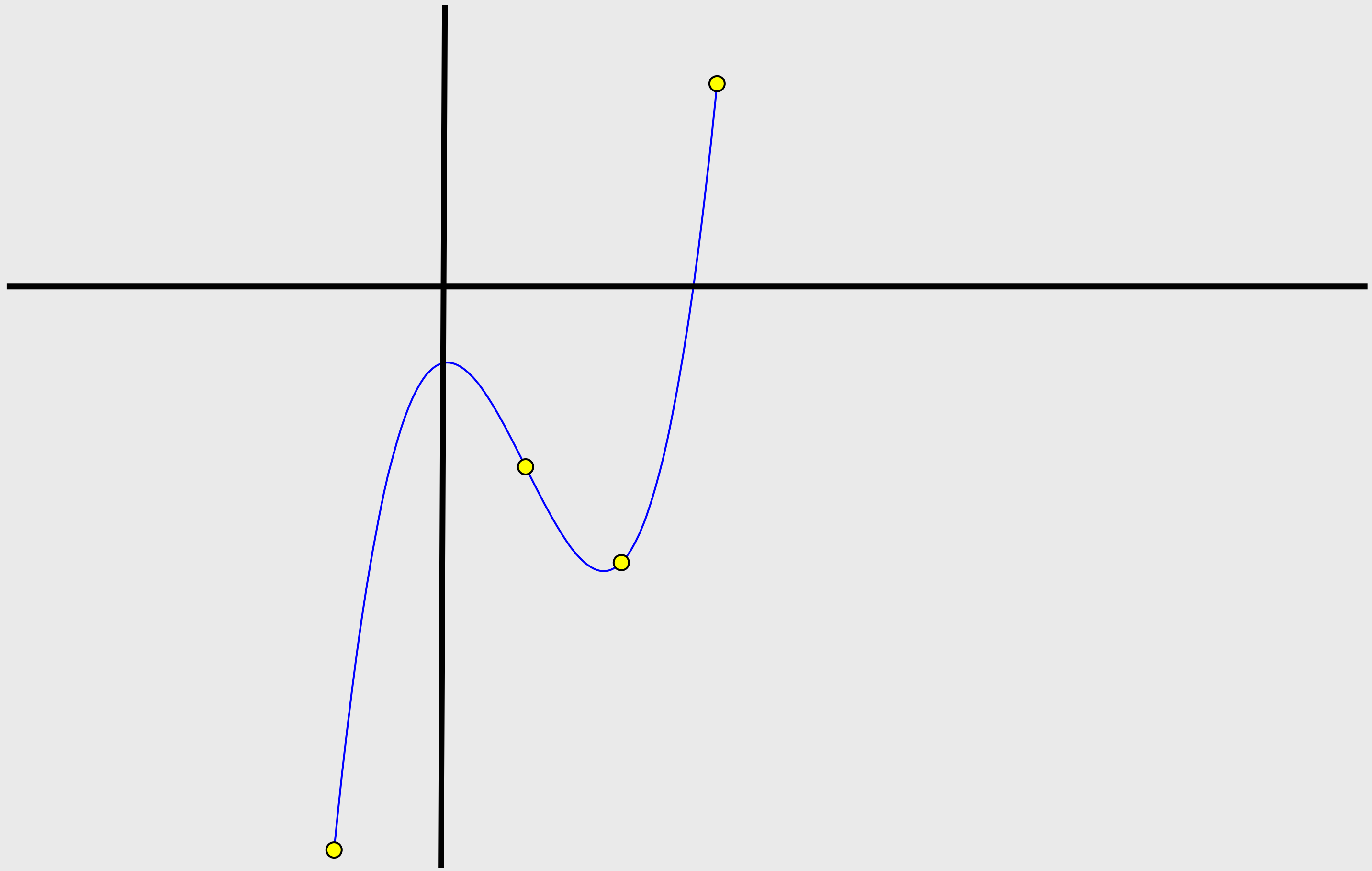
Potom zostavíme interpolačný polynóm

$$P_3(x) = -6\cdot\ell_0(x) - 2\cdot\ell_1(x) - 3\cdot\ell_2(x) + 2\cdot\ell_3(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1\,.$$

Lagrangeov interpolačný polynómom

x_i	-1	1	2	3
y_i	-6	-2	-3	2

$$P_3(x) = -6 \cdot \ell_0(x) - 2 \cdot \ell_1(x) - 3 \cdot \ell_2(x) + 2 \cdot \ell_3(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1\,.$$



Lagrangeov interpolačný polynómom

Hlavnou prednosťou Lagrangeovho interpolačného polynómu je jeho elegantná forma.
Preto sa používa najmä v teoretických úvahách.

Pre praktické použitie nie je ideálny,
lebo má dva hlavné nedostatky

- Ak pridáme ďalší uzol x_{n+1},
  musíme prepočítať všetky fundamentálne polynómy
- Počet operácií potrebných na výpočet hodnoty $P_n(x^*)$
  je pomerne značný,
  vyžaduje $2n^2+2n$ operácií násobenia a
  $2n^2+3n$ operácií sčítania

OBSAH

Newtonov interpolačný polynómom

Nedostatky Lagrangeovho interpolačného polynómu odstraňuje **Newtonov interpolačný polynóm**, ktorý je v tvare

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})\,.$$

Pridanie ďalšieho uzla x_{n+1}, ľahké,
k $P_n(x)$ stačí pripočítať ďalší člen, lebo

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + a_{n+1}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)\,.$$

Newtonov interpolačný polynómom

Hodnotu $z=P_n(x^*)$ určíme podobne ako v **Hornerovej schéme**,
t.j. postupom

$z:=a_n$
a potom pre $i = n\text{-}1, n\text{-}2, \ldots, 0$ počítame
$z := z\,(x^*-x_i) + a_i$.

Dosiahneme tak významnú úsporu počtu operácií.

Koeficienty a_i je možné vypočítať priamo z interpolačných podmienok

$$P_n(x_i) = y_i\,, \qquad i = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Existuje však ešte lepší spôsob získania koeficientov a_i
a ten si teraz ukážeme.

Newtonov interpolačný polynómom

Najskôr definujme **pomerné diferencie:**

$$P[x_i] := y_i\,,$$

$$P[x_i, x_{i+1}] := (P[x_{i+1}] - P[x_i])/(x_{i+1} - x_i)\,,$$

$$P[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] := (P[x_{i+1}, x_{i+2}] - P[x_i, x_{i+1}])/(x_{i+2} - x_i),$$

a ďalej pre $3 \leq k \leq n$:

$$P[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] := (P[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - P[x_i, \ldots, x_{i+k-1}])/(x_{i+k} - x_i)\,.$$

Dá sa ukázať, že

$$a_i = P[x_0, x_1, \ldots, x_i]\,,$$

Takže **Newtonov interpolačný polynóm** je

$$P_n(x) = P[x_0] + P[x_0, x_1](x - x_0) + P[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots$$
$$+ \; P[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})\,.$$

Ak označíme $P_{ik} = P[x_{i-k}, \dots, x_i]$, potom $a_i = P_{ii}$ a **algoritmus výpočtu pomerných diferencií** bude

Pre i=0,1,…,n vykonaj $P_{i0} := y_i$.

Pre k=1,2,…,n vykonávaj:

pre i=k, k+1, …, n vykonávaj:

$$P_{ik} := (P_{i,k-1} - P_{i-1,k-1})/(x_i - x_{i-k})$$

koniec cyklu i ,

koniec cyklu k .

Newtonov interpolačný polynómom

Výpočet je možné prehľadne zapísať do tabuľky,
ktorú vypĺňame po stĺpcoch.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
x_0 & P_{00} & & & & & \\
x_1 & P_{10} & P_{11} & & & & \\
x_2 & P_{20} & P_{21} & P_{22} & & & \\
x_3 & P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\
x_n & P_{n0} & P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{n,n-1} & P_{nn}
\end{array}
$$

Newtonov interpolačný polynómom

Výpočet koeficientov $a_i = P_{ii}$

a

následný výpočet $z=P_n(x^*)$ postupom

$z:=a_n$

a potom pre $i = n-1, n-2, \ldots, 0$ počítame

$z := z\,(x^* - x_i) + a_i.$

vyžaduje

$\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n$ operácií násobenia a

$n^2 + 3n$ operácií sčítania.

Je to výrazne menej ako pri výpočte hodnoty $P_n(x^*)$

z Lagrangeovho polynómu

($2n^2+2n$ operácií násobenia a

$2n^2+3n$ operácií sčítania)

Príklad: Zostavme Newtonov interpolačný polynóm pre dáta z predchádzajúceho príkladu

x_i	-1	1	2	3
y_i	-6	-2	-3	2

Priebeh výpočtu zaznamenávame do tabuľky. Dostaneme

x_i	P_{i0}
-1	-6
1	-2
2	-3
3	2

Newtonov interpolačný polynómom

x_i	-1	1	2	3
y_i	-6	-2	-3	2

$$\begin{aligned} a_0 &= -6 \\ a_1 &= 2 \\ a_2 &= -1 \\ a_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$P_3(x) = -6 + 2 \cdot (x+1) + (-1) \cdot (x+1)(x-1) + 1 \cdot (x+1)(x-1)(x-2)\,.$$

V bode $x^* = 0{,}5$ vypočítame hodnotu polynómu postupom

$z := a_n$

a potom pre $i = n$-1, n-2, … , 0 počítame

$z := z\,(x^* - x_i) + a_i$, t.j.

$$P_3(0{,}5) = ((1 \cdot (0{,}5-2) - 1) \cdot (0{,}5-1) + 2) \cdot (0{,}5+1) - 6 = -1{,}125\,.$$

Newtonov interpolačný polynómom

Keď pridáme ďalší uzol $x_4 = 0$ a v ňom predpíšeme hodnotu $y_4 = 2$, stačí dopočítať jeden riadok tabuľky

x_i	P_{i0}	P_{i1}	P_{i2}	P_{i3}
-1	-6			
1	-2	2		
2	-3	-1	-1	
3	2	5	3	1

x_4	P_{40}	P_{41}	P_{42}	P_{43}	P_{44}
0	2	0	$2{,}5$	$0{,}5$	$-0{,}5$

$$\Longrightarrow \quad a_4 \quad = \quad -0{,}5$$

a potom $P_4(x) = P_3(x) + (-0{,}5) \cdot (x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$
kde

$$P_3(x) = -6 + 2 \cdot (x+1) + (-1) \cdot (x+1)(x-1) + 1 \cdot (x+1)(x-1)(x-2)\,.$$

OBSAH

Označenia

Symbolom $C\langle a,b\rangle$ budeme označovať množinu všetkých funkcií, ktoré sú v intervale $\langle a,b\rangle$ spojité.

Symbolom $C^k\langle a,b\rangle$ množinu všetkých funkcií, ktoré sú na intervale $\langle a,b\rangle$ spojité spolu s deriváciami až do rádu k vrátane.

Pre $k = 0$ zrejme $C^0\langle a,b\rangle \equiv C\langle a,b\rangle$.

Chyba aproximácie interpolačným polynómom

Predpokladajme, že čísla y_i nie sú ľubovoľné,

ale že $y_i = f(x_i)$ sú hodnoty funkcie f v uzloch interpolácie.

Potom nás zaujíma chyba

$$E_n(x^*) := f(x^*) - P_n(x^*)$$

vo zvolenom bode x^*.

Pre $x^* = x_i$ je $E_n(x_i) = 0$.

Aká je chyba mimo uzlov interpolácie?

Chyba aproximácie interpolačným polynómom

Veta: Nech x^* je ľubovoľný bod,

$\langle a,b \rangle$ je nejaký interval obsahujúci všetky uzly x_i interpolácie a

tiež skúmaný bod x^* a

nech $f \in C^{n+1}\langle a,b \rangle$.

Potom pre chybu $E_n(x^*)$ platí

$$E_n(x^*) = f(x^*) - P_n(x^*) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x^* - x_0)(x^* - x_1)\dots(x^* - x_n) ,$$

kde $\xi = \xi(x^*)$ je (bližšie neurčený) bod z intervalu $\langle a,b \rangle$.

Zápisom $\xi = \xi(x^*)$ pritom chceme zdôrazniť,

že poloha bodu ξ závisí nielen na funkcii f a na interpolante P_n,

ale tiež aj na zvolenom bode x^*.

Chyba aproximácie interpolačným polynómom

Poznámky: (Pre jednoduchosť budeme predpokladať

$x_0 < x_1 < \cdots < x_n.$)

1. Ak M_{n+1} je taká konštanta, že $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M_{n+1}$ pre každé $x \in \langle a, b\rangle$, potom

$$\left|E_n\left(x^*\right)\right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{x \in \langle a, b\rangle} \left|\omega_{n+1}(x)\right|,$$

   kde $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$.

   Tento odhad je však zvyčajne príliš pesimistický.

2. Ak má funkcia $f(x)$ derivácie všetkých rádov ohraničené rovnakou konštantou, potom pre dostatočne veľké n je chyba ľubovoľne malá.

Chyba aproximácie interpolačným polynómom

Príklad: Pre $f(x) = \sin x$ je možné vziať $M_{n+1} = 1$, preto

$$|E_n(x)| \le \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} .$$

Dá sa dokázať, že pre $n \to \infty$,

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

takže $P_n(x) \to f(x)$ pre každé x z ľubovoľného intervalu $\langle a, b \rangle$.

Chyba aproximácie interpolačným polynómom

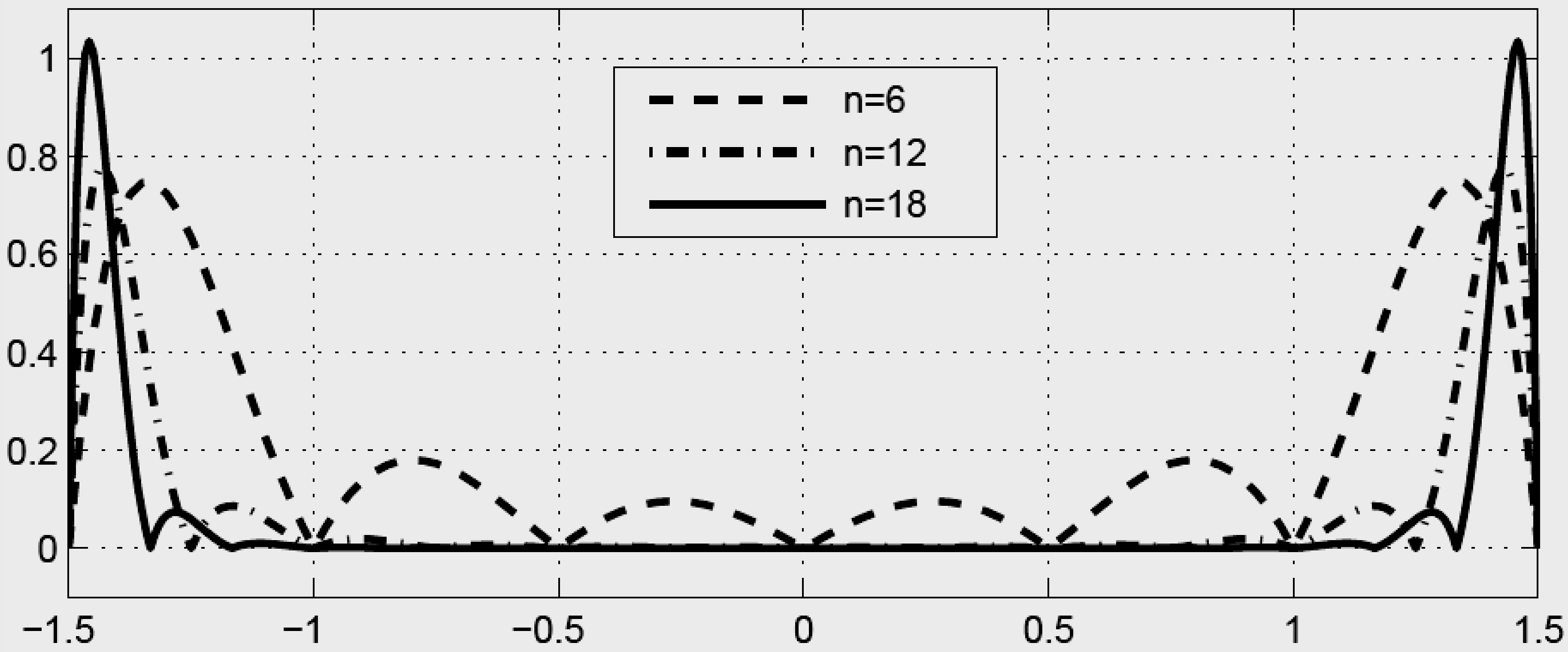
3. Ak interpolačný polynóm používame na výpočet hodnôt interpolovanej funkcie mimo intervalu $\langle x_0, x_n \rangle$, hovoríme, že robíme **extrapoláciu**.
   V tomto prípade môže byť chyba aproximácie veľká, pretože hodnota $|\omega_{n+1}(x)|$ rýchle rastie, keď sa x vzďaľuje od x_0 doľava alebo od x_n doprava.

Chyba aproximácie interpolačným polynómom

3. Ak interpolačný polynóm používame na výpočet hodnôt interpolovanej funkcie mimo intervalu $\langle x_0, x_n \rangle$, hovoríme, že robíme **extrapoláciu**.
   V tomto prípade môže byť chyba aproximácie veľká, pretože hodnota $|\omega_{n+1}(x)|$ rýchle rastie, keď sa x vzďaľuje od x_0 doľava alebo od x_n doprava.

4. $\omega_{n+1}(x)$ môže nadobúdať veľké hodnoty tiež vnútri intervalu $\langle x_0, x_n \rangle$, najmä ak sú uzly x_i rozmiestnené rovnomerne, t.j. keď $x_i = x_0 + ih$, kde h je pevne zvolený krok.

Chyba aproximácie interpolačným polynómom

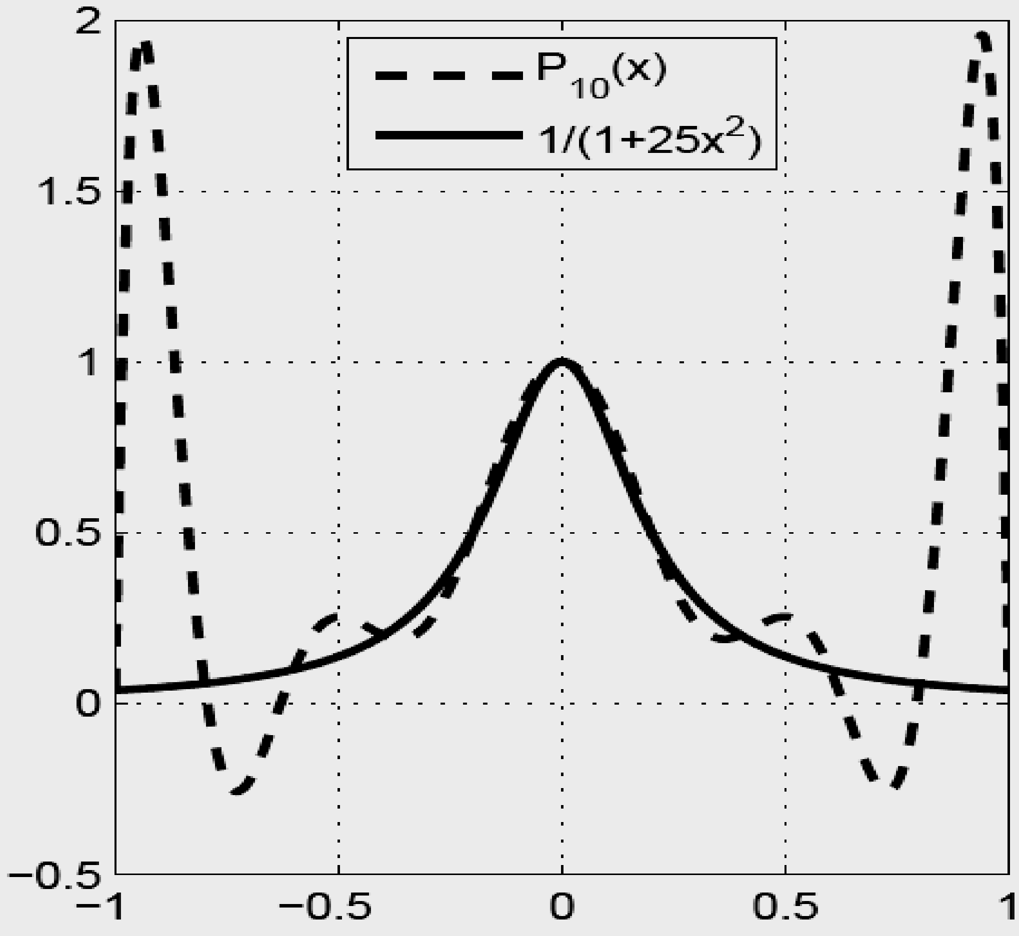


Graf funkcie $|\omega_{n+1}(x)|$

Chyba aproximácie interpolačným polynómom

Príklad: Zostrojme interpolačný polynóm funkcie

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2} \quad \text{na rovnomernom delení intervalu } \langle -1, 1 \rangle .$$



Ide o známy príklad,
na ktorom sa demonštruje,
že pre rastúci počet dielikov
chyba interpolácie
neobmedzene rastie.

Preto sa
používanie
interpolačných polynómov
vysokých stupňov
vo všeobecnosti
neodporúča.

OBSAH

Optimálny výber interpolačných uzlov

Vhodným rozmiestnením uzlov je možné chybu $|\omega_{n+1}(x)|$ minimalizovať.

Definícia: **Normalizovaný polynóm** stupňa n má tvar

$$P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

Veta: Spomedzi všetkých normalizovaných polynómov n-tého stupňa sa práve polynóm

$$\tilde{T}_n(z) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos z)$$

na intervale $\langle -1, 1 \rangle$

najmenej odchyľuje od nuly.

Polynómy $\tilde{T}_n(z)$ voláme **Čebyševove polynómy prvého druhu**.

Optimálny výber interpolačných uzlov

Čebyševove polynómy sa môžu zdať trigonometrické,
no v dôsledku trigonometrických identít je možné nájsť aj takýto zápis

$$\tilde{T}_0(z) = 1$$

$$\tilde{T}_1(z) = z$$

$$\tilde{T}_2(z) = 2z^2 - 1$$

$$\tilde{T}_3(z) = 4z^3 - 3z$$

$$\tilde{T}_4(z) = 8z^4 - 8z^2 + 1$$

$$\cdots$$

$$\tilde{T}_{n+1}(z) = 2z\tilde{T}_n(z) - \tilde{T}_{n-1}(z) \qquad n \geq 1.$$

Optimálne interpolačné uzly sú umiestnené v nulových bodoch Čebyševovho polynómu.

Optimálny výber interpolačných uzlov

Predpokladajme, že hľadáme optimálne rozmiestnenie interpolačných uzlov na intervale $\langle a, b \rangle$.

Urobme transformáciu intervalu $\langle -1,1 \rangle$ na interval $\langle a, b \rangle$

$$x = \frac{b-a}{2} z + \frac{b+a}{2}$$

Nulové body sú Čebyševovoho polynómu stupňa $n+1$

$$\cos\left[(n+1)\arccos z_i\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad (n+1)\arccos z_i = \frac{2i+1}{2}\pi$$

$$z_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right) \quad \Leftarrow \quad \arccos z_i = \frac{2i+1}{2(n+1)}\pi$$

potom **optimálny výber interpolačných uzlov** je

$$x_i = \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right) + \frac{b+a}{2} \qquad i = 0,1,\ldots,n.$$

OBSAH

Hermitova interpolácia

Doposiaľ sme sa zaoberali interpoláciou,
v ktorej bol interpolačný polynóm určený zdanými hodnotami
$P_n(x_i) = y_i$ v uzloch x_i.

Ak interpolačný polynóm určujú navyše aj predpísané derivácie,
hovoríme o **Hermitovej interpolácii.**

Predpokladajme teda,
že v každom uzle x_i je zadaných $\alpha_i + 1$ čísel $y_i^{(0)}, y_i^{(1)}, \dots, y_i^{(\alpha_i)}$.

Označme

$$\alpha = n + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \quad .$$

Potom **Hermitovým interpolačným polynómom** $P_\alpha(x)$ nazveme
polynóm stupňa najviac α , ktorý spĺňa interpolačné podmienky

$$\frac{d^j}{dx^j} P_\alpha(x_i) = y_i^{(j)}, \qquad j = 0, 1, \dots, \alpha_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Je dokázané, že existuje jediný taký polynóm.

Hermitova interpolácia

Ak

$$y_i^{(j)} = \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j} f(x_i)\,, \qquad j = 0, 1, \ldots, \alpha_i\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n\,,$$

hovoríme, že $P_\alpha(x)$ je Hermitov interpolačný polynóm funkcie $f(x)$.

Nech $\langle a, b\rangle$ je interval obsahujúci uzly interpolácie.

Ak $f \in C^{\alpha+1}\langle a, b\rangle$, potom

pre chybu Hermitovej interpolácie v bode $\bar{x} \in \langle a, b\rangle$ platí

$$f(\bar{x}) - P_\alpha(\bar{x}) = \frac{f^{(\alpha+1)}(\xi)}{(\alpha+1)!}(\bar{x} - x_0)^{\alpha_0+1}(\bar{x} - x_1)^{\alpha_1+1}\ldots(\bar{x} - x_n)^{\alpha_n+1}\,,$$

kde $\xi = \xi(\bar{x})$ je nejaký (bližšie neurčený) bod intervalu $\langle a, b\rangle$.

Hermitova interpolácia

Použitie Hermitovho polynómu vysokého stupňa
vo všeobecnosti nemožno odporučiť,
pretože chyba medzi uzlami môže byť značná.

Vzorec pre určenie koeficientov Hermitovho polynómu
je pomerne komplikovaný,
výpočet si ukážeme na príklade.

Príklad Zostrojme Hermitov interpolačný polynóm pre dáta z tabuľky

x_i	y_i	y_i'	y_i''
-1	2	-4	12
1	2	4	

Teda máme $x_0 = -1,\ \alpha_0 = 2,\ y_0^{(0)} = 2,\ y_0^{(1)} = -4,\ y_0^{(2)} = 12,$

$x_1 = \ 1,\ \alpha_1 = 1,\ y_1^{(0)} = 2,\ y_1^{(1)} = \ 4.$

Napriek tomu, že je predpísaných celkovo 5 podmienok,
Hermitov polynóm navrhneme ako polynóm stupňa $\alpha = 4$.
Aby sme si ušetrili prácu,
zapíšeme ho v tvare mocninového rozvoja okolo toho bodu,
v ktorom je predpísaných najviac podmienok,
v našom prípade okolo bodu $x_0 = -1$.

$$P_4(x) = a + b(x+1) + c(x+1)^2 + d(x+1)^3 + e(x+1)^4 .$$

Hermitova interpolácia

x_i	y_i	y_i'	y_i''
-1	2	-4	12
1	2	4	

$$P_4(x) = a + b(x+1) + c(x+1)^2 + d(x+1)^3 + e(x+1)^4 \,.$$

Koeficienty $a,\ b,\ c$ získame ľahko.

Z podmienky $P_4(-1) = 2$ okamžite dostávame $a = 2$.

Podobne z podmienky $P_4'(-1) = -4$ získame $b = 4$ a pretože $P_4''(-1) = 2c$, z podmienky $P_4''(-1) = 12$ dostaneme $c = 6$.

Ďalej

$$P_4(1) = 2 - 4 \cdot 2 + 6 \cdot 2^2 + d \cdot 2^3 + e \cdot 2^4 = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad 8d + 16e = -16\,,$$

$$P_4'(1) = -4 + 2 \cdot 6 \cdot 2 + 3 \cdot d \cdot 2^2 + 4 \cdot e \cdot 2^3 = 4 \qquad \Longrightarrow \qquad 12d + 32e = -16\,.$$

Riešením tejto sústavy dostaneme $d = -4,\ e = 1$. Teda

$$P_4(x) = 2 - 4(x+1) + 6(x+1)^2 - 4(x+1)^3 + (x+1)^4 = x^4 - 1\,.$$

OBSAH

Literatúra

- I.S. Berezin, N.P. Židkov: *Čislennyje metody I,II,* Nauka, Moskva, 1962.
- G. Dahlquist, G. Å Bjőrk: *Numerical Methods,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974.
- M. Fiedler: *Speciální matice a jejich použití v numerické matematice,* SNTL, Praha, 1981.
- D. Hanselman, B. Littlefield: *Mastering MATLAB 7,* Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2005.
- G. Hämmerlin, K. H. Hoffmann: *Numerical Mathematics,* Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- M. T. Heath: *Scientific Computing. An Introductory Survey,* McGraw-Hill, New York, 2002.
- I. Horová, J. Zelinka: *Numerické metody,* učební text Masarykovy univerzity, Brno, 2004.
- J. Kobza: *Splajny,* učební text Palackého univerzity, Olomouc, 1993.
- J. Klapka, J. Dvořák, P. Popela: *Metody operačního výzkumu,* učební text, FSI VUT Brno, 2001.

Literatúra

- J. H. Mathews, K. D. Fink: *Numerical Methods Using MATLAB,* Pearson Prentice Hall, New Jersey, 2004.
- MATLAB: *Mathematics,* Version 7, The MathWorks, Inc., Natick, 2004.
- G. Meurant: *Computer Solution of Large Linear Systems,* Elsevier, Amsterodam, 1999.
- S. Míka: *Numerické metody algebry,* SNTL, Praha, 1985..
- C. B. Moler: *Numerical Computing with MATLAB,* Siam, Philadelphia, 2004.
  `http://www.mathworks.com/moler`.
- J. Nocedal, S. J. Wright: *Numerical Optimization, Springer Series in Operations Research,* Springer, Berlin, 1999.
- A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri: *Numerical Mathematics,* Springer, Berlin, 2000.
- W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling: *Numerical Recipes in Pascal, The Art of Scientific Computing,* Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

Literatúra

- P. Přikryl: *Numerické metody matematické analýzy,* SNTL, Praha, 1985.
- A. R. Ralston: *Základy numerické matematiky,* Academia, Praha, 1973.
- K. Rektorys: *Přehled užité matematiky I,II,* Prometheus, Praha, 1995.
- J. Stoer, R. Bulirsch: *Introduction to Numerical Analysis,* Springer-Verlag, New York, 1993.
- E. Vitásek: *Numerické metody,* SNTL, Praha, 1987.
- W. Y. Yang, W. Cao, T. S. Chung, J. Morris: *Applied Numerical Methods Using Matlab,* John Willey & Sons, New Jersey, 2005.