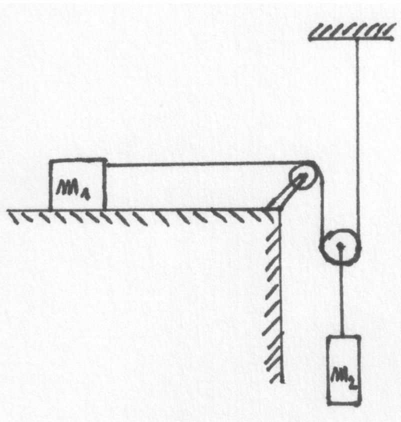
A) kladky

(N 1999/2000, 2)

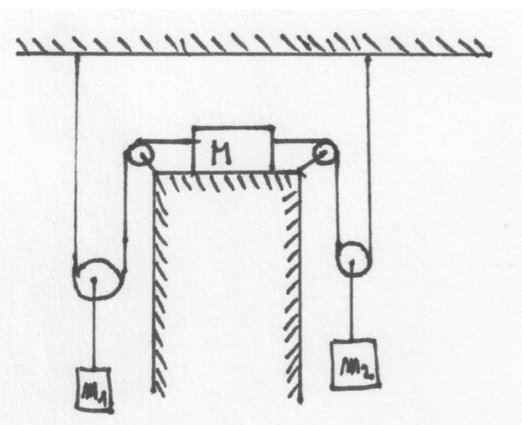
1. Určite veľkosť zrýchlenia telesa m_1 na obrázku. Trenie ani hmotnosť kladky neuvažujte.

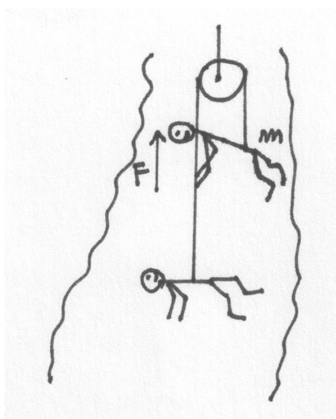


$$\left[a_1 = \frac{2m_2 g}{4m_1 + m_2} \right]$$

(N 2009/2010, 20)

2. Jedna z techník vyťahovania bezvládneho človeka z ľadovcovej trhliny spočíva v zostrojení kladkostroja nad trhlinou, v ktorej nám visí kamarát (viď obrázok). Potom sa plný entuziazmu vrhneme do trhliny a hoop! Problém nastáva, keď sme ľahší ako on. Akou najmenšou veľkosťou sily F musíte vyťahovať kamarátove lano nahor, aby som stroj uviedol do pohybu? Vaša hmotnosť je m, hmotnosť vášho kamaráta je M. (Poznámka: Ak by vás trápil váš následný osud, vedzte, že sa nahor vytiahnete pri zablokovanej kladke.)





$$\left[F = \frac{1}{2}(M - m)g \right]$$

(N 2010/2011, 24)

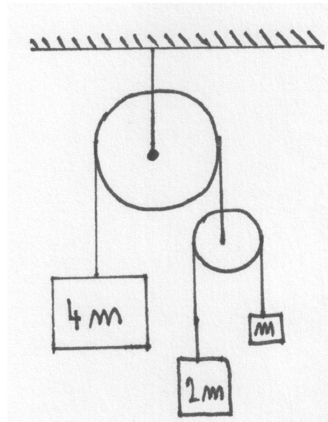
3. Hmotnosti kladiek v nasledujúcej schéme sú zanedbateľné voči hmotnosti závaží. Určite veľkosť zrýchlenia a závažia M. Trenie neuvažujte.

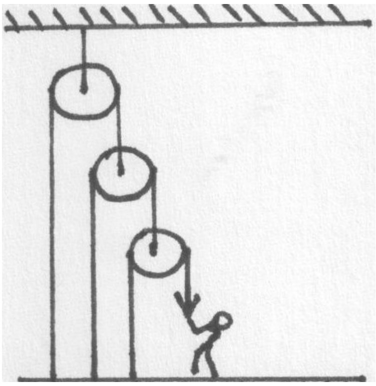
$$\left[a = \frac{2g(m_2 - m_1)}{(4M + m_1 + m_2)} \right]$$

(N 2006/2007, 23)

4. Uvažujte sústavu dvoch kladiek so zanedbateľnými hmotnosťami, ktoré sa môžu otáčať bez akéhokoľvek trenia. Na týchto kladkách sú rozvešané závažia s hmotnosťami 4m, 2m a m. Aké veľké je zrýchlenie najťažšieho z nich?

$$\left[|a_{4m}| = \frac{g}{5} \approx 1{,}96 ms^{-2} \right]$$





(N 2003/2004, 9)

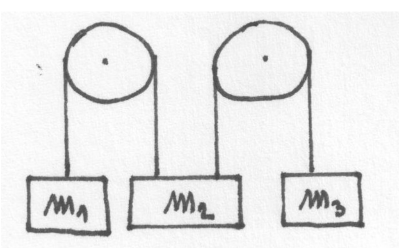
5. Akou veľkosťou sily sa musí človek hmotnosti m držať na tomto systéme kladiek?

$$\left[\frac{mg}{8} \right]$$

(N 2003/2004, 25)

6. S akou veľkosťou zrýchlenia a sa bude pohybovať stredné závažie v sústave kladiek na obrázku?

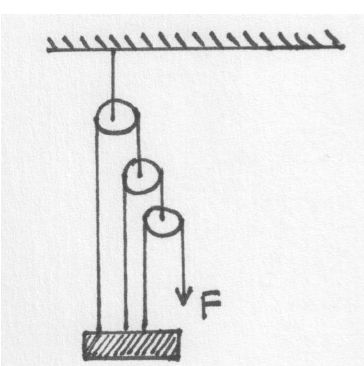
$$\left[a = g\frac{m_2 - m_1 - m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \right]$$



(N 2002/2003, 5)

7. Uvažujme systém nehmotných kladiek podľa obrázka. Akou veľkosťou sily F musíme pôsobiť, aby sme udržali v rovnováhe teleso o hmotnosti m, zavesené na kladkách (podľa obrázka) ?

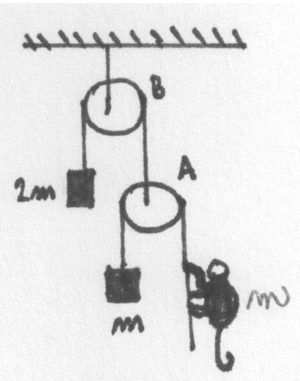
$$\left[F = \frac{mg}{7} \right]$$



(N 2002/2003, 43)

8. Opica hmotnosti m sa nachádza v rovnováhe na sústave kladiek na obrázku. V istom okamihu sa opica začne šplhať veľkosťou rýchlosti u voči lanu. Akou veľkosťou rýchlosti sa bude pohybovať závažie s hmotnosťou $2m$?

$$\left[\frac{u}{4}; nahor\right]$$



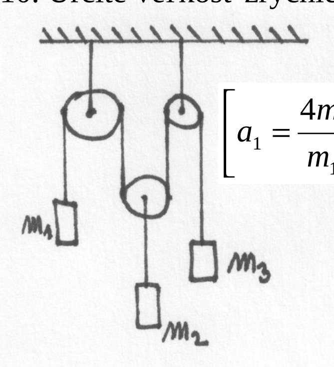
(N 2001/2002, 10)

9. Cez kladku je prevesené lano, na koncoch ktorého sú zavesené telesá s hmotnosťami m_1 a m_2. Akou veľkosťou sily je napínané lano?

$$\left[\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}g\right]$$

(FKS 1998/1999, B-3.1)

10. Určite veľkosť zrýchlenia telies na obrázku. Trenie v sústave neuvažujte, niť považujte za nehmotnú.



$$\left[a_1 = \frac{4m_1m_3 + m_1m_2 - 3m_2m_3}{m_1m_2 + m_2m_3 + 4m_1m_3}g; a_2 = \frac{m_1m_2 + m_2m_3 - 4m_1m_3}{m_1m_2 + m_2m_3 + 4m_1m_3}g; a_1 = \frac{4m_1m_3 + m_2m_3 - 3m_1m_2}{m_1m_2 + m_2m_3 + 4m_1m_3}g\right]$$

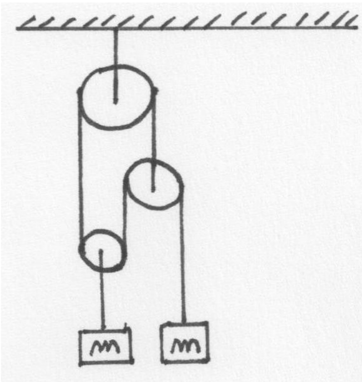
(FKS 1998/1999, B-1.4)

11. Teleso, ktoré má tiaž 60 N, je zavesené na špagáte cez kladku. Minimálna veľkosť sily, ktorou ho udržíme v tej istej polohe je (vďaka treniu medzi kladkou a špagátom) 40 N. Akou veľkou silou treba ťahať za špagát, aby sa teleso začalo pohybovať rovnomerne nahor?

[90 N]

(FX, A6)

12. (*) Aké budú veľkosti zrýchlení jednotlivých telies po uvoľnení kladiek? Hmotnosti všetkých kladiek i lana sú samozrejme zanedbateľné.



[g]

B) sily

(N 2001/2002, 1)

13. Určitá sila udelí telesu s hmotnosťou m_1 veľkosť zrýchlenia 12 m/s^2, tá istá sila udelí telesu s hmotnosťou m_2 veľkosť zrýchlenia 2 m/s^2. Akú veľkosť zrýchlenia udelí táto sila telesu s hmotnosťou $m_1 + m_2$?

$$\left[a = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} = \frac{12}{7} m/s^2 \right]$$

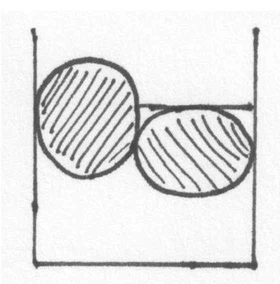
(FYKOS XV-II-1)

14. Výťah s hmotnosťou *m* je zavesený na lane cez pevnú kladku. Za druhý koniec lana ťahá človek stojaci v onom výťahu silou veľkosti *F*. Hmotnosť človeka je *M*. Vypočítajte veľkosť zrýchlenia výťahu.

$$\left[a = \frac{2F}{M+m} - g \right]$$

(N 2000/2001, 15)

15. Akou veľkosťou sily pôsobia na steny úzkej nádoby dve brvná kruhového prierezu (viď obrázok)? Hmotnosť každého dreva je 100 kg. Jedno brvno je do polovice ponorené vo vode, vrchná časť druhého sa dotýka vodnej hladiny.



$$\left[\frac{mg}{\sqrt{3}} \right]$$

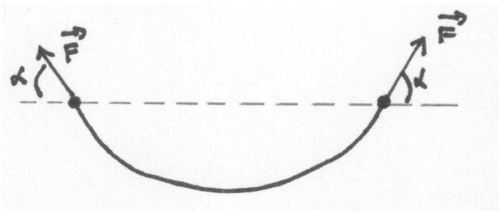
(N 2000/2001, 30)

16. Na vodorovnej ľadovej ploche chce človek (m = 60 kg) potiahnuť ťažké sane (M = 90 kg) ťahaním za povraz. Koeficient statického trenia saní o ľad je μ_1 = 0,2 , trenie človeka o ľad je μ_2 = 0,25. Pod akým najmenším uhlom k ľadu môže človek ťahať za povraz, aby sa sane pohli?

$$\left[tg\alpha_{\min} = \frac{M\mu_1 - m\mu_2}{\mu_1\mu_2(m+M)} = 0{,}4 \Rightarrow \alpha_{\min} \approx 22^\circ \right]$$

(N 2007/2008, 4)

17. Filip má reťaz hmotnosti M. Oba konce drží v rovnakej výške silou rovnakej veľkosti F (viď obrázok). Pod akým uhlom α vzhľadom na horizontálnu rovinu pôsobia tieto sily?

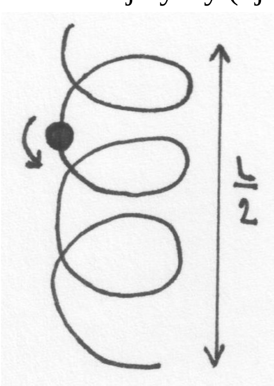


$$\left[\alpha = \arcsin\frac{Mg}{2F} \right]$$

(N 2009/2010, 16)

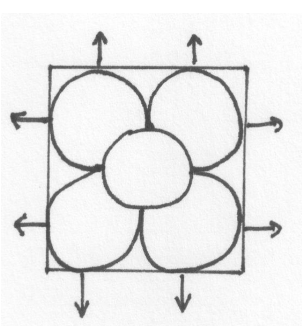
18. Špirála na obrázku má výšku $L/2$ a je zhotovená z drôtu dĺžky L. Koľkokrát dlhšie, než je čas jej voľného pádu z rovnakej výšky (t.j. $L/2$), sa po nej bude šmýkať zhora nadol malá korálka?

[dvojnásobne]



(N 2010/2011, 31)

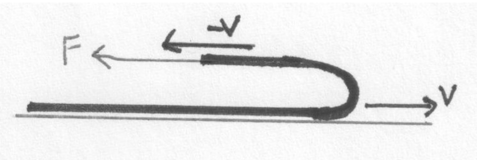
19. Do škatule so štvorcovou postavou o hrane 4R sme dali 5 hladkých gúľ s polomerom R a hmotnosťou M. Pri pohľade zhora teda vnútro krabice vyzerá ako na obrázku. Akou veľkosťou sily F pôsobí každá z dolných štyroch gúľ na každú bočnú stenu, ktorej sa dotýka?



$$\left[F = \frac{1}{8} Mg\sqrt{2} \right]$$

(N 2006/2007, 6)

20. Po hladkej vodorovnej rovine sa veľkosťou rýchlosti v pohybuje tenký a ohybný pásik s hmotnosťou m a dĺžkou l. V jednom okamihu chytím jeho predný koniec a začnem naň pôsobiť silou F, v dôsledku čoho sa tento koniec začne pohybovať veľkosťou rýchlosti $-v$. Aká je veľkosť sily F?



$$\left[F = \frac{2mv^2}{l}\right]$$

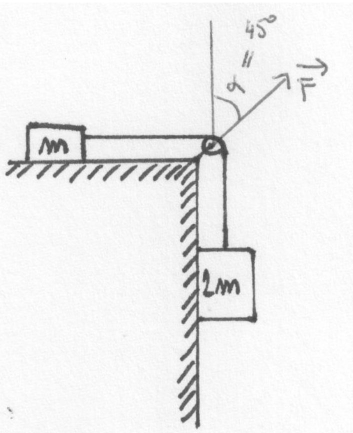
(N 2005/2006, 3)

21. Ak po naklonenej rovine s uhlom sklonu α stúpa bez trenia kvádrik s počiatočnou veľkosťou rýchlosti v, dostane sa do maximálnej vzdialenosti l od miesta, z ktorého vyštartoval. Do akej vzdialenosti sa dostane kvádrik, ak koeficient šmykového trenia medzi ním a naklonenou rovinou je rovný $f = \frac{3}{4} tg\alpha$?

$$\left[\frac{4}{7} l\right]$$

(N 2004/2005, 30)

22. Na obrázku sú dve závažia s hmotnosťami m a $2m$, z ktorých jedno je prevesené cez kladku a klesá, zatiaľ čo druhé sa šmýka po dokonale hladkej vodorovnej podložke. Akou veľkosťou sily je napínané vlákno držiace kladku, ak zviera so zvislicou uhol 45° ?



$$\left[\sqrt{2}\,\frac{2}{3} mg\right]$$

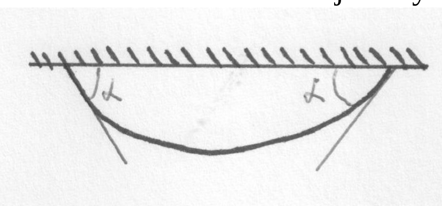
(N 2003/2004, 4)

23. Na to, aby sme udržali hranol na naklonenej rovine so sklonom α, potrebujeme veľkosť sily F_1 (smerujúcu pozdĺž roviny). Aby sme ho vytiahli hore rovnomerným pohybom, potrebujeme zväčšiť veľkosť sily na F_2. Aká je veľkosť koeficientu šmykového trenia μ medzi hranolom a naklonenou rovinou?

$$\left[\mu = \frac{F_2 - F_1}{F_2 + F_1} tg\alpha\right]$$

(N 2002/2003, 13)

24. Retiazka hmotnosti *m* je uchytená za konce tak, že v blízkosti bodov úchytu zviera s horizontálou uhol *α*. Akou veľkosťou sily je napínaná retiazka v jej strede?



$$\left[\frac{mg}{2tg\alpha}\right]$$

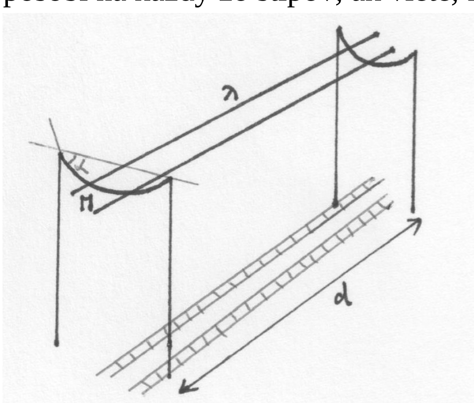
(doc. Ševčík – prednáška, Morin – 2.1, s. 30)

25. Uvažujme voľne visiace lano dĺžky *L*. Určite ťahovú silu *T* (tenziu) ako funkciu miesta *x*. Ťahová sila je vyvolaná len tiažou !

$$\left[T(x) = \rho.g(L - x)\right]$$

(N 2009/2010, 23)

26. Vlakové troleje nad dvojkoľajkou sú zavesené na stĺpoch v rozostupoch *d* (viď obrázok). Dĺžková hustota trolejového vedenia je *λ*. Lano, na ktorom visia troleje, má hmotnosť *M*. Určte veľkosť sily *F*, ktorou toto lano pôsobí na každý zo stĺpov, ak viete, že v bode úchytu zviera lano s horizontálou uhol *α*.



$$\left[F = \frac{\left(\lambda d + \frac{1}{2}M\right)g}{\sin\alpha}\right]$$

(Hajko, II/67)

27. Aký impulz udelí stena pružnej guli s hmotnosťou *m* = 200 g, ktorá na ňu narazí v smere zvierajúcom s normálou k stene uhol *α* = 60°, keď veľkosť rýchlosti gule má hodnotu v_0 = 20 m.s^{-1} ?

[pre veľkosť: 2*mv.cosα* = 4 kg.m.s^{-1}]

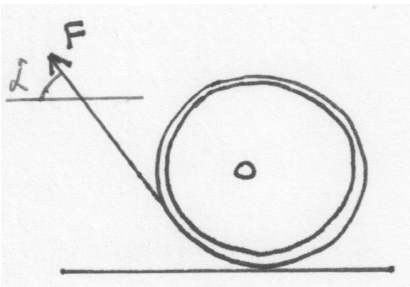
(N 2008/2009, 5)

28. Guľôčka hmotnosti *m* visí zo stropu na špagáte dĺžky *L*. Guľôčku roztočíme tak, aby sa pohybovala po vodorovnej kružnici s polomerom *r*. Aká bude perióda *T* jej obehu?

$$\left[T = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{L^2 - r^2}}{g}}\right]$$

(FKS 1995/1996, B-5.1)

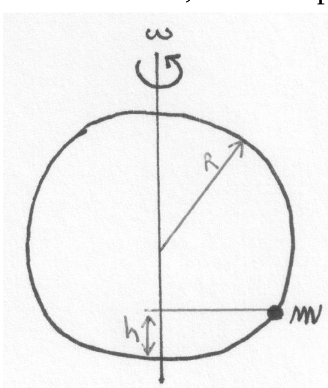
29. Máme cievku a na nej namotanú niť. Cievka je položená na stole, niť sa nedotýka zeme. Pod akým najmenším uhlom môžeme ťahať niť silou veľkosti F, aby sa cievka síce točila, ale zostávala stále na tom istom mieste? Koeficient statického trenia medzi cievkou a stolom je f.



[ľubovoľný nezáporný uhol]

(N 2000/2001, 12)

30. Obruč polomeru R je vo zvislej polohe a otáča sa okolo zvislej osi uhlovou rýchlosťou ω. Na obruči sa nachádza korálka hmotnosti m, ktorá sa po nej môže voľne pohybovať (viď obrázok). V akej výške h sa korálka ustáli ?



$$\left[h = R - \frac{g}{\omega^2}\right]$$

(MMF, s. 12)

31. Aká sila musí pôsobiť na teleso, aby sa pohybovalo po elipse konštantnou uhlovou rýchlosťou ω?

$$\left[F = -m\omega^2 r\right]$$

(FX, A1)

32. (*) Horolezec Tomáš zliezol dokonale hladkú horu tvaru kužeľa s vrcholovým uhlom 2α, ale zabudol si na nej navlečenú kruhovú slučku lana hmotnosti m. Akou veľkosťou sily T je napínaná táto slučka ?

$$\left[T = \frac{mg}{2\pi . tg\alpha}\right]$$

(Morin, s. 26)

33. (*) Lano je omotané o uhol θ okolo piliera. Vezmeme jeden koniec lana a ťaháme ho silou T_0. Druhý koniec je upevnený o loď. Akou najväčšou silou môže lano pôsobiť na loď za predpokladu, že koeficient statického trenia medzi lanom a stĺpom je μ a lano na pilieri neprekĺzava?

$$\left[T \le T_0 \exp(\mu\theta)\right]$$

(200 problems, P 10)

34. (*) V románe Victora Huga Bedári (Les Misérables) hlavná postava Jean Valjean, bývalý kriminálnik (s hmotnosťou m), bol známy schopnosťou liezť po rohu miestnosti tvorenej priesečníkom dvoch kolmých stien.

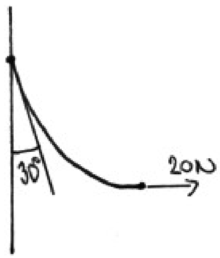
a) Nájdite minimálnu veľkosť sily, ktorou musel Valjean tlačiť na steny počas lezenia.

$$\left[F_{\min} = \frac{mg}{2}\sqrt{\frac{\mu^2+1}{\mu^2-1}} \right]$$

b) Aký musel byť minimálny koeficient statického trenia μ, ktorý by Valjeanovi umožnil tento pozoruhodný čin? [$\mu > 1$]

(200 problems, P 67)

35. (*) Jeden koniec lana je pevne upevnený o zvislú stenu a druhý koniec je ťahaný silou veľkosti 20 N vo vodorovnom smere. Lano zviera so zvislou stenou uhol 30° a jeho tvar je znázornený na obrázku. Určite hmotnosť lana.



[3,5 kg]

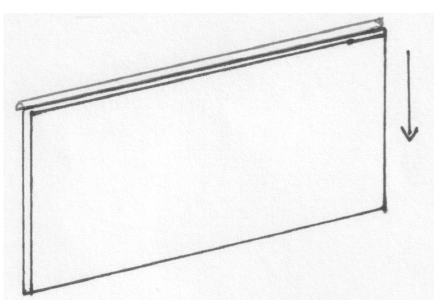
(FKS 1996/1997, A-3.5)

36. (**) Akou najmenšou silou F treba pôsobiť na dosku hmotnosti m, aby sme ju udržali na zvislej stene? Koeficient statického trenia medzi stenou a doskou je f_1, medzi doskou a rukou je f_2.

[ak: $f_1.f_2 \geq 1 \Rightarrow F = \dfrac{mg}{\sqrt{f_1^2+1}}$; ak: $f_1.f_2 < 1 \Rightarrow F = \dfrac{mg\sqrt{f_2^2+1}}{f_1+f_2}$]

(FKS 2000/2001, A-3.2)

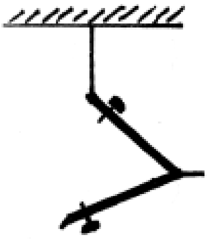
37. (**) Štvorcový záves s dĺžkou strany L = 2 m visí zavesený na vodorovnej tyči. Záves zohneme na polovicu tak, že jeho dolný okraj sa dostane na úroveň tyče. V čase t_0 = 0 s ho pustíme. Nájdite závislosť veľkosti sily, ktorou záves pôsobí na tyč, od času. Záves je hladký, dokonale ohybný a má hmotnosť M = 3 kg.



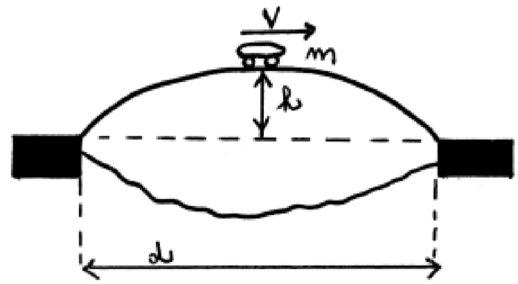
$$\left[\frac{Mg}{2}\left(1+\frac{3}{2}\frac{gt^2}{L}\right) \approx 15(1+7{,}5.t^2)N \right]$$

(200 problems, P 68)

38. (**) Aký veľký uhol θ musia zvierať ramená kružidla, aby jeho kĺb bol v čo najvyššej polohe? Jedno z ramien kružidla je zavesené o pevnú stenu prostredníctvom lanka (viď obrázok). Predpokladajte, že ramená kružidla majú rovnakú dĺžku.



[≈ 70,5°]



(200 problems, P 82)

39. (**) Most ponad rieku šírky d = 100 m má tvar paraboly. Najvyšší bod na moste je vo výške h = 5 m nad úrovňou brehov. Auto s hmotnosťou m = 1 000 kg prechádza po moste konštantnou veľkosťou rýchlosti v = 20 m.s^{-1} (viď obrázok), trenie neuvažujeme. Vypočítajte veľkosť sily N, ktorou pôsobí auto na most, keď je auto:

a) v najvyššom bode mosta, $\left[N = m\left(g - \frac{v^2}{\rho}\right) = 8{,}4 kN;\ \rho = \frac{d^2}{8h}\right]$

b) v troch štvrtinách dĺžky mosta. [N = 8,43 kN]

(FYKOS XV-III-1)

40. (**) Obor s trpaslíkom sa preťahujú o lano, ktoré je omotané okolo starého duba zakoreneného tak pevne, že ho ani obor nedokáže vytrhnúť alebo zlomiť. Pretrhnúť lano sa obrovi tiež nepodarí. Veľký zlý obor je presne 666-krát silnejší než trpaslík. Koľkokrát musí byť lano omotané okolo stromu, aby preťahovanie nikto nevyhral ? Koeficient statického trenia medzi lanom a stromom je 1,04.

[raz]

(FYKOS XI-III-1)

41. (**) Žeriav môže zdvíhať záťaž iba zvislou silou konštantnej veľkosti F. Ako záťaž budeme žeriavom zdvíhať zo zeme nekonečné lano o dĺžkovej hustote λ.

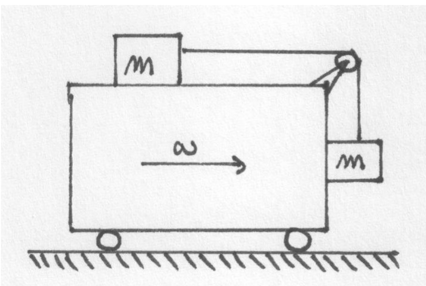
a) Akú maximálnu veľkosť rýchlosti v_{max} dosiahne horný koniec lana počas pohybu? $\left[v_{\max} = \sqrt{\frac{F}{\lambda}}\right]$

b) Akú maximálnu výšku z dosiahne horný koniec lana? $\left[z = \frac{3F}{2\lambda g}\right]$

C) pohyb telies

(N 1999/2000, 11)

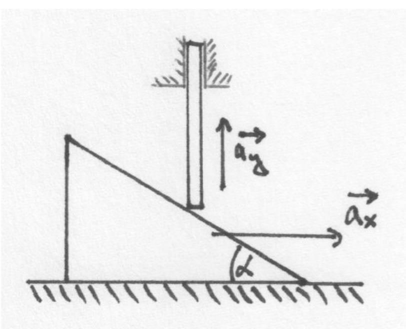
42. S akou veľkosťou zrýchlenia a sa má pohybovať vozík na obrázku, aby sa telesá hmotnosti m voči nemu nehýbali? Koeficient statického trenia je μ. Uvažujeme trenie na oboch stenách vozíka (prednej aj vrchnej), trenie medzi zemou a vozíkom neuvažujeme.



$$\left[a > \frac{1-\mu}{1+\mu} g \right]$$

(N 1999/2000, 13)

43. Hranol so sklonom α (na obrázku) sa pohybuje s vodorovným zrýchlením a_x. S akým zrýchlením a_y sa pohybuje tyč, voľne sa opierajúca o hranol, ktorá sa môže pohybovať len vo zvislom smere?



[pre veľkosti: $a_x = a_y tg\alpha$]

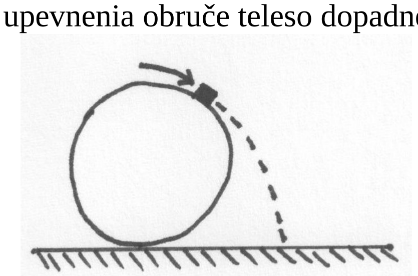
(N 2009/2010, 19)

44. Teplovzdušný balón s celkovou hmotnosťou M prelietal práve ponad internáty v Mlynskej doline, keď naň zosadol kŕdeľ holubov, každý s hmotnosťou m. Koľko ich bolo, ak sa kvôli nim začal balón približovať k zemi so zrýchlením veľkosti a? Odporové sily zanedbajte.

$$\left[N = \frac{Ma}{m(g-a)} \right]$$

(N 2006/2007, 20)

45. Obruč polomeru R = 30 cm je kolmo upevnená na podlahu. Z vrcholu obruče sa kĺže bez trenia malé teliesko. Do akej vzdialenosti D od bodu upevnenia obruče teleso dopadne?



$$\left[D = \frac{5\sqrt{5} + 20\sqrt{2}}{27} R \approx 43{,}9 cm \right]$$

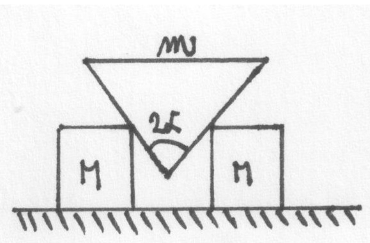
(N 2001/2002, 4)

46. Teplovzdušný balón hmotnosti M klesá nadol s veľkosťou zrýchlenia a. Akú časť m hmotnosti balóna (vo forme vriec s pieskom) je potrebné vyhodiť z balóna aby stúpal s veľkosťou zrýchlenia a nahor?

$$\left[m = \frac{2Ma}{a+g}\right]$$

(N 2001/2002, 24)

47. Na vodorovnom povrchu stoja dve rovnaké kocky s hmotnosťou M. Medzi nimi sa nachádza klin hmotnosti m s vrcholovým uhlom veľkosti 2α. Vypočítajte veľkosť zrýchlenia a každej z kociek. Trenie medzi telesami v sústave neuvažujte.



$$\left[a = \frac{mg.tg\alpha}{m + 2M.tg^2\alpha}\right]$$

(N 2001/2002, 30)

48. Po naklonenej rovine s uhlom sklonu α bol smerom nahor vystrelený puk. Po určitom čase sa puk zastavil a začal sa kĺzať nadol. Určite koeficient šmykového trenia μ medzi pukom a podložkou, ak čas návratu puku do východiskového bodu je n-krát väčší ako čas jeho výstupu.

$$\left[\mu = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} tg\alpha\right]$$

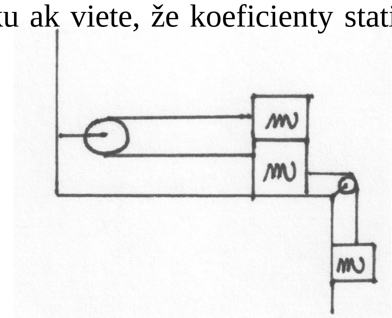
(FYKOS XIX-II-2)

49. Lokomotíva s ôsmymi vagónmi sa rozbieha na dráhe s = 1 km na rýchlosť v = 120 km/h. Aká musí byť minimálna hmotnosť M lokomotívy tohto vlaku, aby sa vlak rozbehol bez preklzávania kolies na koľajnici, pokiaľ hmotnosť každého vagónu je m = 40 t ? Koeficient statického trenia medzi kolesom vagónu a koľajnicou je f = 0,2. Odpor vzduchu a valivý odpor zanedbajte.

$$\left[M = 8m \frac{v^2}{2fgs - v^2} \approx 130 ton\right]$$

(FKS 1994/1995, B-6.2)

50. Určite veľkosť zrýchlenia sústavy telies na obrázku ak viete, že koeficienty statického trenia medzi všetkými telesami sú rovné f.



$$\left[a = \frac{1}{3} g(1 - 4f)\right]$$

(FKS 2000/2001, B-4.3)

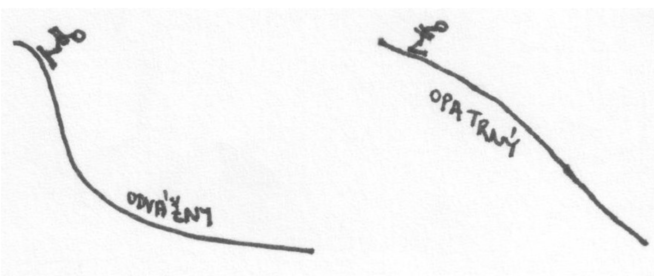
51. Po naklonenej rovine so sklonom α sa šmýkajú dva kvádre hmotností m spojené napnutou niťou. Koeficient šmykového trenia medzi spodným kvádrom (nižšie na naklonenej rovine) a podložkou je
$f_1 = 0,2$, medzi vrchným kvádrom (vyššie na naklonenej rovine) a podložkou je $f_2 = 0,5$. Akou veľkosťou sily F je napínaná niť spájajúca kvádre?

$$\left[F = \frac{1}{2}(f_2 - f_1).mg\cos\alpha \right]$$

(FKS 2000/2001, B-5.2)

52. Dvoch lyžiarov na vrchole kopca napadla myšlienka: „Dáme si preteky!“ Odvážny lyžiar pôjde rovno dole do doliny a potom miernym svahom po doline a dole do dediny. Opatrný lyžiar to urobí naopak, t.j. pôjde najskôr miernym svahom po hrebeni kopca a nakoniec strmo do dediny (výškové profily dráhy oboch lyžiarov sú na obrázku). „Kto prvý príde, platí čaj s rumom!“ Predpokladajte, že obaja lyžiari majú približne rovnakú hmotnosť, majú rovnaké vybavenie a dráhy, po ktorých pôjdu, sú rovnako dlhé a s rovnakým trením. Kto a prečo zaplatí čaj?

[odvážny lyžiar; ukáže sa, že časovo je výhodnejšie nabrať rýchlosť na začiatku ako na konci]



(MMF, s. 92)

53. Teleso sa pohybuje pod pôsobením časovo sa meniacej sily $F(t) = at$. Nájdite polohu telesa v ľubovoľnom čase $x(t)$, ak $x(0) = 1$, $v(0) = 0$.

$$\left[x(t) = \frac{1}{m} a \frac{t^3}{6} + 1 \right]$$

(Hajko, II/59)

54. Na teleso hmotnosti m = 10 kg pôsobí časovo premenná sila $F = p(q - t)$, kde p = 100 N.s^{-1} a q = 1 s.

a) Kedy sa teleso zastaví, ak v čase t = 0 s bola jeho veľkosť rýchlosti v_0 = 0,2 m.s^{-1}. [t = 2,02 s]

b) Akú dráhu prejde teleso do okamihu zastavenia ? [s = 7,07 m]

(Hajko, II/74)

55. Teleso hmotnosti *m* koná rovnomerný priamočiary pohyb s veľkosťou rýchlosti v_0. Je potrebné ho priviesť do pokoja brzdením na dráhe s_0. Brzdiaca sila postupne lineárne s rýchlosťou klesá, a to tak, že na konci pôsobenia, keď sa už teleso zastavilo, klesla hodnota sily na polovicu svojej pôvodnej hodnoty F_0, ktorou sa vyznačovala na začiatku brzdenia. Určite hodnotu F_0 brzdiacej sily na začiatku brzdenia.

$$\left[F_0 = \frac{2mv_0{}^2}{s_0}(1-\ln 2)\right]$$

(doc. Ševčík)

56. Hmotný bod sa pohybuje vo vertikálnej rovine pod vplyvom tiaže a pod vplyvom centrálnej sily $F = m.k^2 r$, kde r je polohový vektor, *m* je hmotnosť HB, *k* je kladná konštanta.

a) Napíšte vektorový a skalárny tvar pohybových rovníc.

$$\begin{bmatrix} a = k^2 \vec{r} + g \\ \ddot{x} - k^2 x = 0 \\ \ddot{y} - k^2 y = -g \end{bmatrix}$$

b) Podľa obrázka sformulujte počiatočné podmienky a nájdite riešenie $x = x(t)$, $y = y(t)$.

$$\begin{bmatrix} x = 0, y = b \\ \dot{x} = v_0, \dot{y} = 0 \\ x(t) = \frac{v_0}{k}\sinh(kt) \\ y(t) = \left(b - \frac{g}{k^2}\right)\cosh(kt) + \frac{g}{k^2} \end{bmatrix}$$

(doc. Ševčík)

57. Z prednášky viete, že na malé telesá guľového tvaru pôsobí pri pohybe v kvapaline odporová sila o veľkosti

$F_{odp} = 6\pi.r\eta.v$, kde:

η je koeficient dynamickej viskozity, r je polomer guľôčky a v veľkosť jej okamžitej rýchlosti. Nech guľôčka o hustote ρ_1 a objeme V padá v kvapaline s hustotou ρ_2 a dynamickou viskozitou η. Určite $v = v(t)$, ak uvážite aj vztlakovú Archimedovu silu.

$$\left[v(t) = \frac{\alpha(1-e^{-\beta.t})}{\beta}; \alpha = g\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right), \beta = \frac{6\pi.r\eta}{\rho_1 V}\right]$$

(doc. Ševčík)

58. Telesu s hmotnosťou m je udelená počiatočná rýchlosť veľkosti v_0 = 2 m.s^{-1} nadol po naklonenej rovine pod uhlom α = 30°. Koeficient dynamického trenia medzi telesom a naklonenou rovinou je f = 0,4. Akú dráhu prejde teleso za 2 sekundy?

$$\left[x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} g(\sin\alpha - f\cos\alpha).t^2 \approx 7m \right]$$

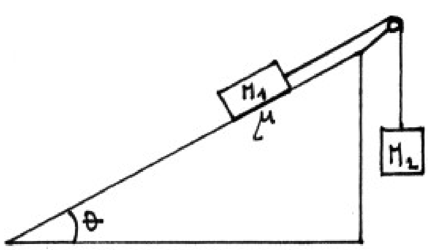
(doc. Ševčík)

59. Auto brzdí na ceste a bez šmyku zastaví. Určite minimálnu brzdnú dráhu auta pohybujúceho sa veľkosťou rýchlosti 72 km/h, ak koeficient statického trenia medzi kolesami a cestou je μ_S = 0,4.

$$\left[\frac{1}{2}\frac{v_0^{\,2}}{g\mu_S} \approx 50m \right]$$

(Morin, s. 55)

60. Teleso s hmotnosťou M_1 leží na naklonenej rovine so sklonom uhla θ a je spojené nehmotným lanom cez nehmotnú kladku s telesom s hmotnosťou M_2 (viď obrázok). Koeficient dynamického trenia medzi telesom M_1 a naklonenou rovinou je μ. Teleso M_2 uvoľníme a teleso M_2 začne byť ťahané po naklonenej rovine smerom nahor.



a) Za akej podmienky sa teleso s hmotnosťou M_1 začne pohybovať nahor po naklonenej rovine ?

$$\left[M_2 > M_1(\mu\cos\theta + \sin\theta) \right]$$

b) Aká bude veľkosť zrýchlenia oboch telies ?

$$\left[a = \frac{g(M_2 - \mu.M_1\cos\theta - M_1\sin\theta)}{M_1 + M_2} \right]$$

c) Aká bude veľkosť ťahovej sily v lane ?

$$\left[T = \frac{M_1 M_2 g(1 + \mu\cos\theta + \sin\theta)}{M_1 + M_2} \right]$$

(FKS 2000/2001, B-4.2)

61. (*) Parašutista (m = 80 kg) otvára padák pri veľkosti rýchlosti v_0 = 60 m/s. Jeho ustálená veľkosť rýchlosti je v_u = 6 m/s. Aká najväčšia veľkosť ťahovej sily T napína laná jeho padáka, ktorého otvorenie považujeme za okamžité? (Odporová sila vzduchu je úmerná druhej mocnine rýchlosti.)

$$\left[T = mg\,\frac{v_0^{\;2}}{v_u^{\;2}} \approx 78kN\right]$$

(MMF, s. 74)

62. (*) Ohybná retiazka dĺžky l je prevesená cez stôl. Vplyvom vlastnej tiaže sa začne pohybovať. Nájdite, ako sa bude meniť dĺžka prevísajúcej časti $x(t)$, ak v čase t = 0 s visela zo stola dĺžka l_0.

a) Uvažujte pohyb retiazky bez trenia.

$$\left[x = l_0 \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)\right]$$

b) Uvažujte pohyb retiazky s trením (μ – koeficient šmykového trenia).

$$\left[x = \frac{l}{2}\left(l_0 - \frac{l\mu}{1+\mu}\right)\left\{\exp\left(\sqrt{\frac{g}{l}(1+\mu)}t\right) + \exp\left(-\sqrt{\frac{g}{l}(1+\mu)}t\right)\right\} + \frac{l\mu}{(1+\mu)}\right]$$

(FYKOS XXI-II-1)

63. (*) Predstavte si, že idete rýchlikom veľkosťou rýchlosti v. Pozeráte sa von z otvoreného okna a sledujete okolitú krajinu. O tri okná ďalej v smere jazdy (d = 6 m) nejaký zákerný lump vypľuje žuvačku. Koľko času t máte, aby ste sa stihli žuvačke vyhnúť? Samozrejme predpokladáme, že žuvačka je dokonalá guľa s polomerom r = 0,5 cm a hmotnosťou m = 1,4 g a z okna nebola vyhodená, ale vlastne položená do prúdu vzduchu.

$$\left[t = \sqrt{\frac{2d}{Kv^2}} \approx 0{,}69s;\, K = \frac{CS\rho}{2m}\right]$$

[za predpokladu: C = 0,5 ; ρ = 1,2 kg.m^{-3}]

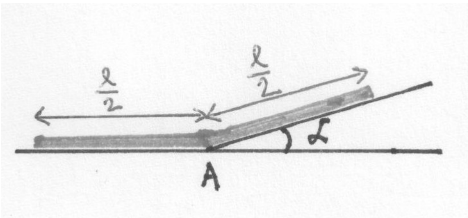
(FKS 1997/1998, A-3.4)

64. (*) Vypočítajte, do akej maximálnej výšky h môže odletieť kvapka vody z mokrého kolesa s polomerom R, ktoré sa pohybuje po mokrej vodorovnej podložke rýchlosťou v.

$$\left[h = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{gR}{v^2} + 1\right)^2\right]$$

(FKS 1994/1995, A-2.2)

65. (**) Ohybná tyčka dĺžky *l* a hmotnosti *m* bola v čase $t = 0$ s celá tesne pred bodom *A* a mala istú rýchlosť. Po čase T_0 sa tyčka zastavila tak, že jej stred bol v bode *A*. Určte čas T_0.



$$\left[T_0 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g\sin\alpha}} \right]$$

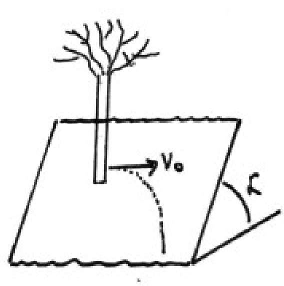
(FYKOS XVI-V-1)

66. (**) V dažďovom mraku je množstvo malých kvapôčok vody, ktorých hustotu (t.j. celkovú hmotnosť kvapôčok v nejakom objeme predelenú týmto objemom) označme ρ_1, hustotu vody ρ_0. Spojením niekoľkých kvapôčok vznikne väčšia kvapka, ktorá začne padať a postupne na seba nabaľuje ďalšie a ďalšie kvapky. Vypočítajte, ako sa bude meniť polomer *r* padajúcej kvapky s časom *t* a s akou veľkosťou zrýchlenia *a* sa bude pohybovať. Pre zjednodušenie neuvažujte odporovú silu vzduchu pôsobiacu na kvapku a malé kvapôčky považujte za nehybné.

$$\left[r = \frac{\rho_1 a t^2}{8\rho_0}; a = \frac{1}{7}g \right]$$

(200 problems, P 85)

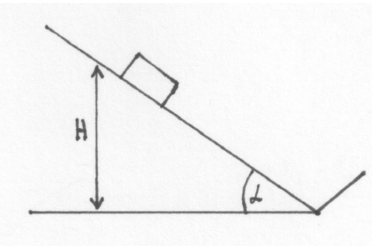
67. (**) Dvojica detí stojí na dlhom naklonenom kopci, ktorý možno uvažovať ako rovinu. Povrch kopca je dostatočne zľadovatený, aby sa dieťa, ktoré sa pošmykne a spadne, po kopci šmýkalo nadol konštantnou rýchlosťou. Pre väčšiu zábavu jedno z detí, ktoré sa opiera o strom, druhé z detí postrčí s počiatočnou veľkosťou rýchlosti $v_0 = 1$ m.s^{-1}. Dieťa sa v dôsledku toho začne po naklonenej rovine šmýkať rýchlosťou, ktorá mení smer aj veľkosť. Aká bude konečná rýchlosť dieťaťa, ak odpor vzduchu je zanedbateľný a trecia sila nezávisí na rýchlosti?



$$\left[\frac{v_0}{2} = 0{,}5 m.s^{-1} \right]$$

(FKS 1999/2000, A-1.4)

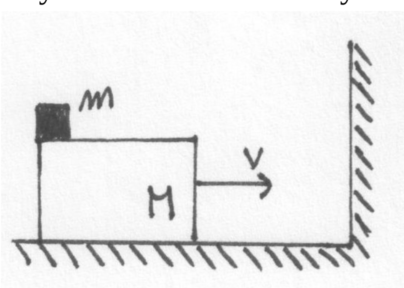
68. (**) Teleso si nedalo pozor a dostalo sa na šikmú plochu so sklonom α a koeficientom šmykového trenia f. Na úpätí je zarážka, od ktorej sa teleso vždy odrazí naspäť, ale s k-násobkom rýchlosti, ktorou na ňu dopadne ($k < 1$). Za aký čas T sa teleso došmýka?



$$\left[T = \sqrt{\frac{2H}{g \sin\alpha}} \frac{1 + k\frac{a_1}{a_2}}{1 - k\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}} ; a_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha), a_1 = g(\sin\alpha + f\cos\alpha) \right]$$

(N 2000/2001, 35)

69. (**) Kváder hmotnosti M a dĺžky L sa pohybuje proti stene veľkosťou rýchlosti v. Aká môže byť maximálna hodnota tejto veľkosti rýchlosti, aby malé teliesko hmotnosti m položené na začiatku kvádra z neho nespadlo po zrážke kvádra so stenou? Koeficient šmykového trenia medzi kvádrom a telieskom je f, kváder sa po podložke šmýka bez trenia a od steny sa odrazí pružne.



$$\left[v_{\max} = \sqrt{\frac{gfL\left(1 + \frac{m}{M}\right)}{2}} \right]$$

D) inerciálne a neinerciálne sústavy

(N 2005/2006, 12)

70. Stojíme na okraji loďky hmotnosti M. My máme hmotnosť m. Rozbehneme sa vzhľadom na loďku so zrýchlením veľkosti a. S akou veľkosťou zrýchlenia sa pohybujeme vzhľadom na vodu?

$$\left[\frac{M}{m + M} a \right]$$

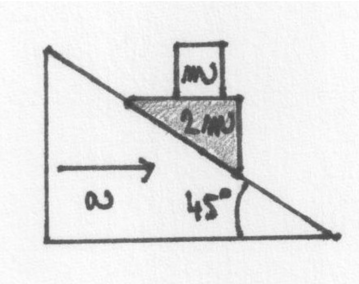
(N 2005/2006, 16)

71. Na počiatku príbehu bola nehmotná palička AB dĺžky l. V bode B sa nachádzal hmotný bod. Jedného dňa sa bod A začal z ničoho nič pohybovať rovnomerne priamočiaro rýchlosťou v kolmo na AB a ťahať za sebou bod B. Rýchlosť bodu A sa pritom nemenila – stále bola rovnako veľká, kolmá na počiatočný stav úsečky. Za aký čas sa úsečka AB otočila o 360° ? Všetko sa samozrejme nachádza vo vákuu a mimo akéhokoľvek gravitačného poľa.

$$\left[\frac{2\pi . l}{v} \right]$$

(N 2003/2004, 33)

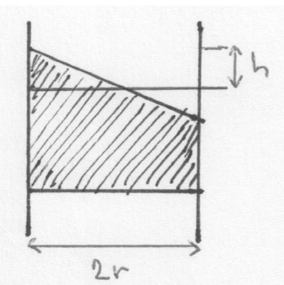
72. Na obrázku je sústava hranolov (oba majú sklon 45°). Veľkosť zrýchlenia väčšieho hranola udržiavame na hodnote *a*. Akou veľkou silou na seba pôsobia hranoly s hmotnosťami 2*m* a *m* ? Trenie medzi hranolmi a hranolom a podložkou neuvažujte.



$$\left[\frac{2}{5}m(a+g)\right]$$

(N 2004/2005, 32)

73. Predstavte si, že sedíte v lietadle a neposlúchli ste múdru letušku. Tá vám radila, aby ste pred štartom zasunuli vyklápací stolík, ktorý je pred vami. Vy však na ňom máte položený pohár v tvare valca s vnútorným polomerom *r*, naplnený džúsom tak, že od hladiny k jeho okraju chýba už len výškový rozdiel *h*. Aké môže byť veľkosť maximálneho zrýchlenia *a* štartujúceho lietadla, aby sa z pohára nevyliala ani kvapka džúsu? Veľkosť tiažového zrýchlenia je *g*.



$$\left[a=\frac{hg}{r}\right]$$

(N 2001/2002, 14)

74. Na prepravníku auta je naložená bedňa tvaru kvádra so štvorcovou podstavou s dĺžkou hrany *d* a výškou *h*. Aká je najväčšia hodnota tejto výšky, aby sa bedňa pri zrýchľovaní auta šmýkala, ale neprevracala? Koeficient statického trenia medzi bedňou a podložkou je μ.

$$\left[h<\frac{d}{\mu}\right]$$

(FKS 2000/2001, B-1.1)

75. Dve autá hmotnosti *m* idú na rovníku proti sebe. Obidve autá majú voči Zemi rovnakú veľkosť rýchlosti *v*. Vypočítajte rozdiel prítlačných síl, ktorými pôsobia na Zem. (Doba rotácie Zeme okolo svojej osi je *T*.)

$$\left[\Delta F=\frac{8\pi.mv}{T}\right]$$

(FKS 1999/2000, B-5.1)

76. V metre človek nevníma zákruty a má pocit, že ide stále rovno. Určte, aký sklon α musia mať koľajnice v zákrute s polomerom R, ak ňou súprava prechádza vždy veľkosťou rýchlosti v, aby cestujúcu zákrutu nepocítil. Ako by sa dalo „zamaskovať“ stúpanie a klesanie na trati metra?

$$\left[\alpha = arctg\,\frac{v^2}{gR}; a = \pm g\sin\alpha\right]$$

(Morin, s. 466-467)

77. Preskúmajte, kam dopadne voľne pustené jablko z výšky h. Pre jednoduchosť predpokladajte, že jablko padá na rovníku.

a) Riešte problém v (pevnej) inerciálnej sústave.

b) Riešte problém v neinerciálnej sústave spojenej s rotujúcou Zemou.

$$\left[\frac{2\omega.h}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$$

(FYKOS XIII-III-1)

78. Na pokusnej strelnici sa nachádza vrhač asfaltových holubov. Vo vzdialenosti d od nej stojí poľovník snažiaci sa zasiahnuť letiaci cieľ. Pod akým uhlom α musí poľovník namieriť na holuba, aby ho trafil, ak vie, že na zamierenie potrebuje čas τ (t.j. čas od vrhu holuba do výstrelu)? Asfaltové holuby sú vrhané kolmo nahor rýchlosťou v_h = 25 m.s^{-1}, náboj opúšťa hlaveň rýchlosťou v_0 = 400 m.s^{-1}, vzdialenosť d = 50 m a čas τ = 2 s. Odpor vzduchu zanedbajte a predpokladajte, že vrhač holubov je v rovnakej výške ako koniec hlavne zbrane.

[α = 31° 56´]

(FYKOS XIII-III-4)

79. Auto sa pohybuje po letiskovej ploche rovnomerne priamočiaro (vzhľadom k letiskovej hale) rýchlosťou v. Okrem auta stojí na letiskovej ploche letuška (nestojí na priamke, po ktorej sa pohybuje auto). V okamihu, keď je auto k letuške najbližšie (t.j. spojnica auto – letuška je kolmá na v), sa vodič rozhodne, že príde letušku navštíviť. Auto dokáže v ľubovoľnom smere vyvinúť zrýchlenie o maximálnej veľkosti a. Za aký najkratší čas sa auto dostane k letuške? Čas sa začína počítať od okamihu fatálneho rozhodnutia, v tomto okamihu je auto od letušky vzdialené d. Predpokladajte, že auto pri letuške nezastaví ani nepribrzdí.

$$\left[t = \frac{\sqrt{2v^2 + 2\sqrt{v^4 + a^2 d^2}}}{a}\right]$$

(FKS 2002/2003, A-3.3)

80. Vlak sa pohybuje po priamej trati. Vnútri vlaku je o podlahu pevne pripevnený stôl. Na stole je zápalková škatuľka. Vlak začne zrazu brzdiť (rovnomerne spomaľovať) so spomalením veľkosti *a*, čím sa zápalková škatuľka dá do pohybu. Po prejdení vzdialenosti *l* po stole vysokom *h* stôl opustí a po páde vo vzduchu nakoniec dopadne na zem. V akej vzdialenosti *s* od stola dopadne? Uvažujte, že vlak brzdí po celý čas pádu zápalkovej škatuľky. Trenie medzi stolom a škatuľkou je nulové.

$$\left[s = \frac{ah}{g} + 2\sqrt{\frac{ahl}{g}} \right]$$

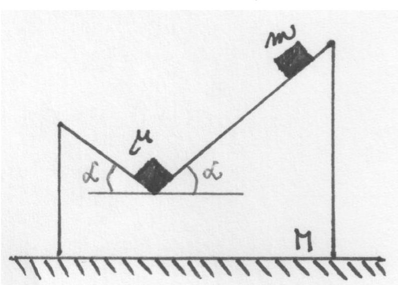
(N 2001/2002, 25)

81. (*) Akou najväčšou veľkosťou rýchlosti *v* môžeme prechádzať klopenou zákrutou? Polomer zákruty je *R*, jej klopenie *α*, veľkosť tiažového zrýchlenia *g* a koeficient statického trenia o podložku je *μ*.

$$\left[v^2 \leq gR\frac{\mu\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} \right]$$

(FYKOS IX-III-1, FKS 2000/2001, A-3.1)

82. (*) Na vodorovnej rovine je položený vyrezaný hranol s hmotnosťou *M* (viď obrázok), ktorý sa po nej môže pohybovať bez trenia. V najnižšom mieste leží malá kocka s hmotnosťou *μ*. Na naklonenej časti hranola leží iná malá kocka s hmotnosťou *m*. Obe malé kocky sa môžu pohybovať po vyrezanom hranole bez trenia. Aká podmienka musí byť splnená medzi hmotnosťami *M*, *m*, *μ* a uhlom *α*, aby sa po uvoľnení kocky *m* kocka *μ* začala voči hranolu *M* pohybovať ?



$$\left[m\cos(2\alpha) > M + \mu \right]$$

(N 2001/2002, 37)

83. (*) Martinko sa vozí na kolotoči, jeho veľkosť rýchlosti v sedačke zavedenej na tyči dĺžky *l* je *v*. Kolotoč nemá vodorovnú časť ramien, lano je pripevnené priamo k otáčajúcej sa tyči. Aká je veľkosť uhlovej rýchlosti *ω* otáčania kolotoča ?

$$\left[\omega = \frac{g\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{v^4 + 4l^2g^2} - v^2}} \right]$$

(FYKOS XII-I-2)

84. (*) Vzdialenosť medzi osou predného a zadného kolesa motocyklu je d = 1,4 m, ich polomer je r = 0,3 m a koeficient statického trenia medzi pneumatikami a cestou je f = 1. Ťažisko motocykla je uprostred medzi osami vo výške h = 0,8 m nad zemou. Vypočítajte minimálnu brzdnú vzdialenosť pre počiatočnú rýchlosť motocyklu v = 60 km/h, ak vodič používa:

a) len zadnú brzdu, $$\left[\frac{v^2(d+hf)}{fdg} \approx 44{,}5m\right]$$

b) len prednú brzdu, $$\left[\frac{v^2 h}{dg} \approx 16{,}2m\right]$$

c) obe brzdy. $$\left[\frac{v^2 h}{dg} \approx 16{,}2m\right]$$

(FYKOS XV-III-3)

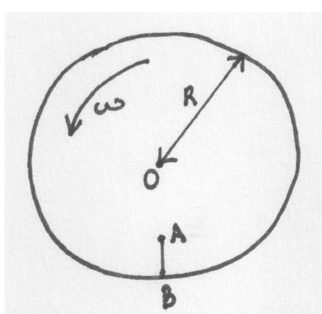
85. (*) Zimná sezóna je tu, ale než vyrazíte lyžovať, zamyslite sa nad tým, aký tvar majú cencúle rastúce na otáčajúcom sa kolese lyžiarskeho vleku. Rovina kolesa zviera s vodorovnou rovinou uhol α, koleso sa otáča uhlovou rýchlosťou ω a cencúľ rastie vo vzdialenosti r od osi otáčania.

$$\left[z = -\frac{g\cos\alpha}{\omega^2}\ln\frac{r}{r_0}\right]$$

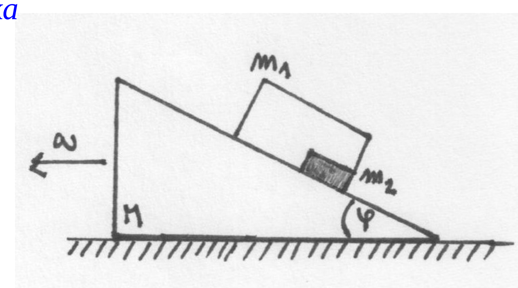
[logaritmická krivka, kde: r_0 – vzdialenosť cencúľa od stredu kolesa ; z – vertikálna súradnica]

(N 2002/2003, 44)

86. (*) Kozmická loď rotuje uhlovou rýchlosťou ω. Človek stojaci v mieste A na jej obvode vypustí z rúk nejaký predmet (človek rotuje spolu s loďou, $|AB| = h$). Nech predmet dopadne do bodu B' na obvode rakety. Nech sa kozmonaut nachádza v tomto čase v bode A'. Vypočítajte veľkosť uhla $A'OB'$.



$$\left[|\angle A'OB'| = \frac{\sqrt{2Rh-h^2}}{R-h} - \arccos\frac{R-h}{R}\right]$$



(FKS 2002/2003, A-1.4)

87. (**) Na naklonenej rovine je dutý kváder hmotnosti m_1 a v ňom malý kvádrik hmotnosti m_2 (viď obrázok). Naklonená rovina má sklon φ a hmotnosť M, trenie medzi všetkými zúčastnenými telesami je nulové. Sústavu držíme nehybnú, po uvoľnení sa uvedie do pohybu. Aká je veľkosť zrýchlenia malého kvádrika vzhľadom na:

a) naklonenú rovinu? $\left[g \sin\varphi \dfrac{M + m_1 + m_2}{M + (m_1 + m_2)\sin^2\varphi} \right]$

b) veľký kváder? [0]

E) odhadovačky

(FKS 1996/1997, B-1.3)

88. Odhadnite, aká veľká je odchýlka vody v rieke od vodorovnej hladiny, ktorá je spôsobená otáčaním Zeme, ak rieka tečie zo severu na juh v mieste so zemepisnou šírkou φ?

[vyšší breh: západ; odchýlka: $\alpha = arctg \dfrac{2\omega v \sin\varphi}{g}$, v – veľkosť rýchlosti rieky, ω – veľkosť uhlovej rýchlosti Zeme]

(FKS 1996/1997, B-3.1)

89. Optimistický parašutista padá z veľkej výšky bez padáka a dopadne na naklonenú rovinu. Odhadnite, aký musí byť jej sklon, aby sa nezabil.

[veľmi strmý, rádovo(!) 80°]

(FKS 1996/1997, A-3.3)

90. Keď fúka vietor, je prirodzené kráčať predklonený. Prečo a ako veľmi sa treba predkloniť? Odhadnite, pri akej maximálnej rýchlosti vetra môže ešte človek proti nemu kráčať? Kráčanie je to, keď sa chodí „tak normálne“ a zeme sa dotýkame len chodidlami.

[☺]

F) úlohy na premýšľanie (kvalitatívne)

(FKS 1999/2000, B-2.2)

(*) Keď rýchlo idúce auto zabrzdí, jeho predná časť poklesne. Prečo? [☺]